

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Madame KERBRAT née LUNTZ Jeanine Hélène

1^{re} THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES CHAMPS DE YANG ET MILLS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 19 juin 1970 devant la Commission d'examen.

MM. A. LICHNEROWICZ *Président*

	POENARU	} <i>Examineurs</i>
Mlle	LIBERMANN	
	LIONS	

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
1970



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Contribution à l'étude du champ de Yang et Mills

par

Mme Hélène KERBRAT-LUNC

Le travail présenté ici est consacré à l'étude du champ de Yang et Mills. L'idée de Yang et Mills [1] est de plus en plus utilisée en théorie des champs. Nous pensons donc qu'il ne serait pas inutile d'en rappeler brièvement les grandes lignes ainsi que les applications et les généralisations les plus intéressantes qui en ont résulté.

La théorie de Yang et Mills est basée sur le principe d'invariance de jauge en électrodynamique.

Les équations du champ électromagnétique libre ainsi que la condition de Lorentz sont invariantes par des transformations appelées les transformations de jauge de seconde espèce qui s'écrivent

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ est une fonction scalaire qui est solution de l'équation

$$\square \varepsilon(x) = 0.$$

Cette invariance préserve la nullité de la masse au repos du photon. En couplant le champ électromagnétique avec un champ de particules de masse non nulle, cette propriété du photon n'est pas conservée. C'est pour obtenir l'invariance du Lagrangien total qu'on introduit les transformations de jauge de première espèce :

$$\Psi_\alpha \rightarrow e^{\frac{ie}{\hbar c} \varepsilon(x)} \Psi_\alpha, \quad \Psi_\alpha^* \rightarrow e^{-\frac{ie}{\hbar c} \varepsilon(x)} \Psi_\alpha^*$$

où e est la charge de l'électron, $\hbar$ la constante de Planck et c la vitesse de la

lumière. Le Lagrangien total est invariant par l'ensemble des deux transformations de jauge.

Yang et Mills ont fait un raisonnement inverse. Ils ont supposé d'abord l'invariance de jauge de première espèce et ont démontré alors l'existence d'un champ vectoriel de type électromagnétique qui est couplé au champ matériel considéré.

Examinons un peu plus en détail l'article de Yang et Mills. Ces auteurs sont partis de la loi de conservation du spin isotopique.

Le paramètre de spin isotopique (ou isospin) a été introduit pour la première fois en physique par Heisenberg en 1932. En effet, on avait remarqué que le proton et le neutron étaient deux particules de masse pratiquement égales et que chaque nucléon stable contenait le même nombre de protons et de neutrons. On pouvait donc les considérer comme deux états d'une même particule. Le paramètre de spin isotopique permettait de décrire ces deux états.

En 1937, Wigner introduit la notion de spin isotopique total T . D'après les expériences il semble que cette quantité soit conservée dans toutes les interactions fortes. Dire que le spin isotopique total est conservé dans les interactions signifie que ces interactions doivent être invariantes par les rotations du spin isotopique. C'est dire que l'orientation de l'axe du spin isotopique n'a aucune signification physique et que la différenciation entre le proton et le neutron (par exemple) est purement arbitraire. Toutefois le choix fait pour un point de l'espace détermine l'état pour tous les autres points.

Ici intervient l'idée originale de Yang et Mills. Ils ont remarqué que la théorie des champs est basée sur un formalisme de caractère local et ont postulé l'invariance des interactions par des rotations de spin isotopique indépendantes *en tout point de l'espace-temps*.

Yang et Mills définissent une transformation de jauge isotopique comme la manière arbitraire de choisir une orientation des axes du spin isotopique en tout point de V_4 .

Ils postulent que tout processus physique est invariant par rapport à une transformation de jauge isotopique qui s'écrit :

$$\Psi' = S^{-1}\Psi$$

où S représente une rotation du spin isotopique indépendante du point de V_4 ; c'est-à-dire, en utilisant les mêmes notations que pour le champ électromagnétique, la fonction ε dépend de x .

Yang et Mills introduisent un champ vectoriel B_μ (du type A_μ) qui est couplé avec un champ complexe Ψ_α . Pour préserver l'invariance du Lagran-



gien total, B_μ subit une transformation de jauge de seconde espèce quand Ψ_α en subit une de première espèce.

Le champ B_μ a douze composantes indépendantes. Yang et Mills s'intéressent plus particulièrement au couplage du champ B_μ avec un champ complexe de particules de spin isotopique 1/2, décrit par une fonction d'onde Ψ à deux composantes, avec une transformation de jauge isotopique

$$\Psi = S\Psi'$$

où $S \in \text{SU}(2)$.

Le champ B_μ subit donc une transformation de jauge de seconde espèce et l'invariance du Lagrangien total s'écrit alors :

$$S(\partial_\mu - i\varepsilon B'_\mu)\Psi' = (\partial_\mu - i\varepsilon B_\mu)\Psi.$$

On peut évidemment construire un Lagrangien total avec un champ de matériel de spin isotopique quelconque couplé au champ B_μ . La représentation de la transformation S est alors différente.

Ils introduisent donc un formalisme indépendant de la *valeur* du spin isotopique du champ étudié. La matrice S étant une combinaison linéaire des matrices T^i ($i = 1, 2, 3$) du moment angulaire du spin isotopique. On définit le champ B_μ par

$$B_\mu = 2b_\mu T$$

où b_μ et T sont les composantes d'un vecteur dans l'espace (de dimension 3) de spin isotopique. b_μ est un champ vectoriel invariant par le choix de la représentation S . Les interactions entre un champ matériel Ψ et le champ b_μ peuvent s'écrire à l'aide de termes du type :

$$(\partial_\mu - 2i\varepsilon b_\mu T)\Psi.$$

b_μ a également douze composantes dont 9 réelles et 4 imaginaires pures.

Yang et Mills construisent alors un champ « d'observables », c'est-à-dire des tenseurs $F_{\mu\nu}$ covariants par rapport aux transformations de jauge isotopique et définis par :

$$F_{\mu\nu} = 2f_{\mu\nu}T$$

où

$$f_{\mu\nu} = \frac{\partial b_\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial b_\nu}{\partial x_\mu} - 2\varepsilon b_\mu \times b_\nu.$$

Les transformations infinitésimales des composantes du champ vectoriel b_μ sont de la forme :

$$b'_\mu = b_\mu + 2b_\mu \times \delta\omega + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta\omega.$$

Elles correspondent aux transformations infinitésimales de jauge isotopique :

$$S = 1 - 2iT\delta\omega.$$

Dans la seconde partie de leur article, Yang et Mills écrivent les équations du champ b_μ couplé avec un champ matériel Ψ de spin isotopique 1/2 en partant d'un Lagrangien

$$L = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}\cdot f_{\mu\nu}.$$

Les équations de mouvement sont alors obtenues par la méthode classique de calcul variationnel à partir de la densité de Lagrangien total :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}f_{\mu\nu}\cdot f_{\mu\nu} - \bar{\Psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - i\epsilon\tau b_\mu)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi.$$

L'étude de ces équations montre que le spin isotopique provient du champ matériel et du champ b_μ lui-même. Les équations en b_μ sont non linéaires même en l'absence du champ matériel. Yang et Mills l'expliquent par le fait que b_μ engendre (au moins partiellement) le spin isotopique qui le crée.

Les équations du champ doivent être complétées par une condition supplémentaire, analogue à la condition de Lorentz pour le champ électromagnétique. Cette condition s'écrit :

$$\frac{\partial b_\mu}{\partial x_\mu} = 0.$$

Elle permet d'éliminer la partie scalaire du champ b_μ et de même cela impose une condition sur les transformations de jauge isotopique possible. Ces transformations doivent satisfaire l'équation

$$2b_\mu \times \frac{\partial}{\partial x_\mu} \delta\omega + \frac{1}{\epsilon} \square \delta\omega = 0.$$

Ici aussi nous voyons immédiatement l'analogie avec la condition

$$\square \epsilon(x) = 0$$

que doit satisfaire la transformation de jauge de seconde espèce pour un champ électromagnétique.

Enfin dans la dernière partie du travail, Yang et Mills indiquent une possibilité de quantification de b . Nous ne l'analyserons pas ici. Notons simplement que l'opérateur de quantification est défini par

$$\Pi_\mu = -\frac{\partial b_\mu}{\partial x_4} + 2\epsilon(b_\mu \times b_4),$$

ce qui permet d'obtenir les lois de commutation :

$$[b_{\mu}^i(x), \Pi_{\nu}^j(x')]_{t=t'} = -\delta_{ij}\delta_{\mu\nu}\delta^3(x-x').$$

En analysant les propriétés des quantas b on peut conclure qu'ils ont un spin 1 et un spin isotopique 1. Compte tenu de la loi de conservation de la charge électrique et supposant que les nucléons se transforment l'un en l'autre avec émission d'un quanta b , on lui attribue trois états de charge possibles $\pm e$ et 0. Une particule ayant les mêmes propriétés mais de spin 0 existait déjà. C'était le méson π . Depuis on a également découvert expérimentalement une particule de spin 1, appelée le méson vectoriel ρ . Quant au problème concernant la masse du quanta b , la discussion ouverte par Yang et Mills n'y apporte pas de résultat et diverses possibilités sont envisagées.

L'article de Yang et Mills a vivement intéressé beaucoup de physiciens et a donné lieu à de nombreuses publications. Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux travaux de Sakurai et de Utiyama.

Sakurai [2] a donné les premiers éléments d'une nouvelle théorie des interactions fortes par une généralisation du travail de Yang et Mills.

L'idée de Sakurai est de construire une théorie qui serait basée sur les trois lois de conservations exactes qui sont

- 1) la loi de conservation du nombre baryonique B ,
- 2) la loi de conservation de l'hypercharge Y ,
- 3) la loi de conservation de l'isospin T .

Il crée alors une « triple » théorie de Yang et Mills avec trois types d'invariance de jauge isotopique, baryonique et de l'hypercharge. Cela permet d'obtenir trois sortes de couplages et donc trois champs vectoriels $B^{(B)}$, $B^{(T)}$, $B^{(Y)}$ reliés au caractère local des conservations envisagées.

En partant du principe (basé sur des résultats de Pais) qu'il n'existe pas d'autres symétries internes exactes en dehors de celles-ci, Sakurai obtient une théorie des interactions fortes avec les trois Lagrangiens d'interactions suivants

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_T &= -f_TB_{\mu}^{(T)} \cdot J_{\mu}^{(T)}, \\ \mathcal{L}_Y &= -f_Y B_{\mu}^{(Y)} \cdot J_{\mu}^{(Y)}, \\ \mathcal{L}_B &= -f_B B_{\mu}^{(B)} \cdot J_{\mu}^{(B)}.\end{aligned}$$

Les champs $B_{\mu}^{(T)}$, $B_{\mu}^{(Y)}$ et $B_{\mu}^{(B)}$ sont analogues au champ électromagnétique A_{μ} . $J_{\mu}^{(T)}$, $J_{\mu}^{(Y)}$ et $J_{\mu}^{(B)}$ sont les densités de courant créés par des champs ayant respectivement l'isospin, l'hypercharge et la charge baryonique non

nuls. Chaque couplage est caractérisé par une constante universelle f_T, f_Y, f_B . En analysant les résultats obtenus par l'expérience et par diverses théories, l'auteur arrive à la conclusion que ces constantes sont telles que

$$f_B^2 > f_Y^2 > f_T^2.$$

La constante f_T correspond à la constante ε introduite par Yang et Mills.

En supposant que toutes les interactions fortes sont des « manifestations des trois couplages fondamentaux », Sakuraï conclut d'après l'expérience que la parité est nécessairement conservée dans les interactions fortes. L'invariance par les inversions temporelles est également respectée car les constantes f_T, f_Y et f_B sont réelles. Donc, en vertu du théorème de Lüders (conservation de C. P. T.) l'invariance par la conjugaison de charge est également vérifiée.

Le problème de la masse des quantas $B^{(T)}, B^{(Y)}, B^{(B)}$ est alors posé. Le fait que le champ de Yang et Mills $B^{(T)}$ soit en interaction avec lui-même montre que les quantas $B^{(T)}$ peuvent avoir une masse non nulle. Pour $B^{(Y)}$ et $B^{(B)}$, on ne peut pas utiliser le même argument car il n'existe pas d'auto-interaction les concernant. Néanmoins il existe une interaction entre $B^{(Y)}$ et $B^{(B)}$, donc ces quantas pourraient également avoir des masses au repos non nulles. D'après Lee et Yang [3] il n'est pas possible que la masse de $B^{(B)}$ soit nulle car s'il en était ainsi, les couplages avec ce champ ne pourraient représenter des interactions fortes. En étendant ce raisonnement au champ $B^{(Y)}$, Sakuraï admet que les champs B sont des champs matériels. Toutefois il ne s'agit là que de raisonnements heuristiques; une argumentation plus précise reste à découvrir.

La théorie de Sakuraï apporte beaucoup de réponses sur des phénomènes que la théorie du potentiel de Yukawa ne pouvait expliquer. Mais il ne peut être question que de réponses qualitatives étant donné que ce n'est qu'une théorie statique. Pour que ces informations soient utilisables, il faut faire des calculs approfondis et s'intéresser à la dynamique des interactions. Cependant, ces investigations purement qualitatives sur la nature des forces et des potentiels intervenant dans les interactions envisagées semblent être en bon accord avec les expériences.

Dans son article, Sakuraï démontre que finalement toutes les propriétés des particules en interactions, leur spectre de masse, le problème des anti-particules peuvent être expliqués grâce aux trois lois de conservation fondamentales et à l'aide des couplages de courants baryoniques, de l'hypercharge et de l'isospin. En examinant l'action de ces couplages séparément et leur superposition, l'auteur arrive à satisfaire aux principes de Païs (qu'il semble

considérer comme fondamentaux), c'est-à-dire le principe de hiérarchie des interactions et celui de « l'économie des constantes ».

En voulant expliquer le mystère du brisage des symétries dans certains types d'interactions, Sakurai est amené à la conclusion qu'il y a peut-être un lien entre la limite de validité d'une loi de conservation et la force du couplage correspondant.

Utiyama [4] généralise le travail de Yang et Mills par des méthodes plus « mathématiques ». Il considère un système de champs $Q^A(x)$ invariant par un certain groupe de transformations dépendant de n paramètres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$. En remplaçant ce groupe par un autre plus général G' dépendant de fonctions arbitraires $\varepsilon(x)$, Utiyama propose de répondre aux questions suivantes :

- 1) Quel champ $A(x)$ introduit-on grâce à l'invariance par les transformations G' ?
- 2) Comment se transforme A par G' ?
- 3) De quel type est l'interaction entre A et Q ?
- 4) Comment peut-on déterminer le nouveau Lagrangien total d'interaction $L(Q, A)$ à partir du Lagrangien $L(Q)$?
- 5) Quelles sont les équations du champ A ?

Pour répondre à ces questions, Utiyama construit une théorie « élargie » de Yang et Mills. Il montre ensuite que le champ électromagnétique et le champ de Yang et Mills sont uniquement des cas particuliers de sa théorie.

Soit donc une famille de champs $Q^A(x)$ où $A = 1, 2, \dots, N$. La densité du Lagrangien pour ces champs s'écrit $L(Q^A, Q^A)$ où

$$Q^A_{,\mu} = \frac{\partial Q^A}{\partial x^\mu}.$$

L'intégrale d'action

$$I = \int_{\Omega} L d^4x$$

doit être invariante par la transformation infinitésimale

$$\begin{aligned} Q^A &\rightarrow Q^A + \delta Q^A \\ \delta Q^A &= T_{(a)}^A{}_B \varepsilon^a(x) Q^B \end{aligned}$$

où $\varepsilon^a(x)$ sont des fonctions infinitésimales arbitraires ($a = 1, \dots, n$) et $T_{(a)}^A{}_B$ est un coefficient constant. Cette transformation ne préservant pas

l'invariance du Lagrangien total d'interaction, il faut introduire un nouveau champ $A^j(x)$ admettant la transformation infinitésimale

$$\delta A^j = U_{(a)}^j{}_k A^k \varepsilon^a(x) + C_{(a)}^j{}_\mu \frac{\partial \varepsilon^a(x)}{\partial x^\mu}$$

où les coefficients $U_{(a)}$ et $C_{(a)}$ sont des constantes inconnues. Utiyama établit une méthode générale de construction du champ A à partir d'un groupe de Lie de transformations laissant invariant le système de champs Q^A .

Comme exemples, Utiyama considère trois groupes de Lie fondamentaux en physique :

- 1) le groupe de transformations de phase d'un champ chargé;
- 2) le groupe de Lorentz;
- 3) le groupe de rotation dans l'espace de spin isotopique.

La méthode de Utiyama pour les deux premiers groupes conduit à la mise en évidence du champ électromagnétique et du champ de gravitation respectivement. A l'aide du troisième groupe on obtient le champ de Yang et Mills.

Examinons plus en détail ce dernier cas. Comme exemple, Utiyama prend un champ formé de protons et de neutrons :

$$\Psi^\alpha = \begin{pmatrix} \Psi^1 \\ \Psi^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{proton} \\ \text{neutron} \end{pmatrix}$$

La transformation infinitésimale de ce champ par des rotations de l'espace de spin isotopique s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta \Psi^\alpha &= i \sum_{c=1}^3 \varepsilon^c \tau_{(c)}^\alpha{}_\beta \Psi^\beta, \\ \delta \bar{\Psi}_\alpha &= -i \sum_{c=1}^3 \varepsilon^c \bar{\Psi}_\beta \tau_{(c)}^\alpha{}_\beta \end{aligned}$$

où $\tau_{(1)}$, $\tau_{(2)}$, $\tau_{(3)}$ sont les matrices de spin isotopique. En remplaçant les paramètres $\varepsilon^{(a)}$ par des fonctions $\varepsilon^{(a)}(x)$, Utiyama introduit le champ de Yang et Mills $B_\mu^c(x)$ ($c = 1, 2, 3$) qui apparaît dans le Lagrangien total par les termes :

$$\nabla \Psi^\alpha = \frac{\partial \Psi^\alpha}{\partial x^\mu} - i \tau_{(c)}^\alpha{}_\beta \Psi^\beta B_\mu^c.$$

Les résultats de Yang et Mills sont alors obtenus. En effet la

transformation infinitésimale des composantes du champ B s'écrit :

$$\delta B^c_\mu = f^c_{ab} \varepsilon^a(x) B^b_\mu + \frac{\partial \varepsilon^c(x)}{\partial x^\mu},$$

où

$$f^c_{ab} \cdot i\tau_{(c)} = [i\tau_{(a)}, i\tau_{(b)}].$$

Le champ « d'observables » est défini par :

$$F^a_{\mu\nu} = \frac{\partial B^a_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial B^a_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{1}{2} f^a_{bc} (B^b_\mu B^c_\nu - B^b_\nu B^c_\mu)$$

ce qui est identique aux formules obtenues par Yang et Mills.

Des travaux cités ici (et il y en a beaucoup d'autres), il apparaît clairement que la théorie de Yang et Mills n'est pas simplement un exercice de style. Elle peut probablement servir de point de départ pour une nouvelle théorie des interactions fortes. Il faut donc la développer, la rendre mathématiquement plus rigoureuse pour éviter les erreurs qui fausseraient complètement les résultats et donc l'interprétation physique. C'est dans cet esprit que nous avons voulu aborder l'étude des champs de Yang et Mills.

Nous introduisons donc le champ de Yang et Mills comme une connexion infinitésimale définie sur un espace fibré principal. Comme base de l'espace fibré nous prenons l'espace-temps général V_4 . Le groupe structural est un groupe de Lie contenant le groupe de Lorentz homogène comme sous-groupe.

Le cadre est particulièrement bien adapté à l'utilisation des méthodes et résultats de la géométrie différentielle globale [5] en théorie des champs.

Les changements infinitésimaux de sections locales de l'espace fibré fournissent une interprétation géométrique des transformations de jauge et les transformations infinitésimales du champ s'obtiennent alors sans difficulté. Nous obtenons donc un champ de Yang et Mills relativiste ce qui paraît important pour l'étude non seulement qualitative, mais surtout quantitative des interactions fortes.

Quelques cas particuliers sont étudiés et des champs de type Yang et Mills associés au groupe $L(4) \times O(3)$, au groupe de Weyl et au groupe conforme sont introduits. Nous avons choisi ces groupes en raison de leur particulière importance en théorie des champs.

En partant d'un principe variationnel nous écrivons les équations du champ de Yang et Mills et une solution dans un cas simple est exhibée.

CHAPITRE I

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE A L'ÉTUDE DU CHAMP DE YANG ET MILLS [24]

1. Définition d'un champ de Yang et Mills.

Soit V_4 l'espace-temps de la Relativité Générale et $\mathcal{E}(V_4)$ l'espace fibré principal des repères orthonormés de V_4 de groupe structural $L(4)$ (groupe de Lorentz homogène complet).

Soit G un groupe de Lie de dimension N d'automorphismes d'un espace vectoriel K de dimension n .

Nous supposons qu'il existe un homomorphisme h du groupe G sur le groupe de Lorentz homogène complet $L(4)$.

Si $E(V_4, G, p)$ est un espace fibré principal, nous introduisons une application H de cet espace fibré sur $\mathcal{E}(V_4)$.

H est un homomorphisme associé à h et est appelé projection fibrée. Il satisfait aux trois conditions suivantes :

- 1° H est une application différentiable;
- 2° Si π est une projection canonique dans $\mathcal{E}(V_4)$, alors

$$p = \pi \circ H,$$

c'est-à-dire que pour $x \in V_4$, $z \in p^{-1}(x)$ nous avons

$$\pi(H(z)) = x \quad \text{si} \quad p(z) = x.$$

Autrement dit le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\ & \searrow \rho \quad \swarrow \pi & \\ & V_4 & \end{array}$$

$$3^\circ H(z \cdot g) = H(z) \cdot h(g) \quad \text{où} \quad z \in E(V_4, G, p), g \in G.$$

H est donc une projection et tous les éléments de $\mathcal{E}(V_4)$ sont atteints.

Nous introduisons une connexion infinitésimale Ω sur l'espace fibré $E(V_4, G, p)$. Cette connexion est telle que

$$\underline{h}[\Omega](v) = \omega(H'v)$$

où ω est la connexion riemannienne de V_4 , v un vecteur arbitraire tangent

à G donc $\Omega(v)$ appartient à l'algèbre de Lie du groupe G . Ceci entraîne que $h(\Omega(v)) \in \mathfrak{A}(L(4))$ (nous notons par $\mathfrak{A}(L(4))$ l'algèbre de Lie de $L(4)$) car $\omega(H'v) \in \mathfrak{A}(L(4))$. h est un homomorphisme d'algèbres de Lie :

$$\mathfrak{A}(G) \xrightarrow{h} \mathfrak{A}(L(4))$$

induit par l'homomorphisme h défini précédemment.

Ce formalisme nous permet maintenant d'introduire un champ associé à la connexion infinitésimale Ω .

Ce champ est appelé champ de Yang et Mills et est construit de la manière suivante.

Soit $\{G_I\}$ une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ ($I = 1, \dots, N$). Les éléments G_I sont les générateurs infinitésimaux du groupe de Lie G . La matrice de connexion peut alors s'écrire dans cette base :

$$(1.1) \quad \Omega = A^I G_I$$

ou bien

$$\Omega_\mu = (\Omega_\mu^a{}_b) = A^I_\mu G_I^a{}_b$$

où $\mu = 0, \dots, 3$ est l'indice de la variété V_4 et $a, b = 1, \dots, n$ (n dimension de l'espace vectoriel K). Les coefficients A^I_μ sont appelés composantes locales du champ de Yang et Mills.

2. Dérivée invariante [6].

A l'aide de la connexion Ω , nous pouvons définir une dérivée invariante pour les variables du champ. Elle est analogue à la dérivée covariante des tenseurs. Pour étendre la notion de dérivée invariante aux variables du champ à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ nous sommes conduits à introduire les coefficients

$$\omega_\mu^K{}_I = A_\mu^J C_J^K{}_I \quad \text{où} \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad \text{et} \quad K, I = 1, \dots, N.$$

Les $C_J^K{}_I$ sont les constantes structurales du groupe G . Nous obtenons alors la dérivée « invariante » des générateurs infinitésimaux du groupe :

$$(1.2) \quad D_\mu G_I^a{}_b = \partial_\mu G_I^a{}_b + \Omega_\mu^a{}_r G_I^r{}_b - \Omega_\mu^r{}_b G_I^a{}_r - \omega_\mu^K{}_I G_K^a{}_b.$$

Les G_I étant les générateurs infinitésimaux du groupe de Lie G , ils sont fixes, c'est-à-dire $\partial G_I^a{}_b = 0$ donc le choix des coefficients ω est équivalent aux relations

$$D_\mu G_I^a{}_b = 0.$$

§ 3. Transformation infinitésimale des composantes du champ de Yang et Mills.

Soit $z(x)$ une section locale de $E(V_4, G, p)$. Les composantes locales du champ A^I sont des 1-formes sur $E(V_4, G, p)$. La section locale $z(x)$ est définie sur un ouvert $U \subset V_4$, les A^I définissent donc des 1-formes locales sur U . $z(x)$ est un champ local de repères orthonormés sur U qu'on écrit $\{e_\alpha(x)\}$; pour $x \in U$ on a $H(z(x)) \in \mathfrak{E}(V_4)$ et :

$$H(z(x)) = e_\alpha(x).$$

Soit $\Theta(x)$ les corepères associés. On écrit alors

$$A_U^I = A_\mu^I \Theta^\mu \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad ; \quad I = 1, \dots, N.$$

Les composantes locales A_μ^I du champ de Yang et Mills ne dépendent que de la donnée d'une section locale $z(x)$ de $E(V_4, G, p)$. Pour trouver la loi de transformation des A^I nous effectuons un changement de section locale de $E(V_4, G, p)$ au-dessus de V_4 défini par $z(x) \rightarrow z'(x)$ où $z'(x) = z(x) \cdot g(x)$.

La matrice de connexion se transforme suivant la loi [5] :

$$\Omega' = \text{adj}(g^{-1})\Omega + g^{-1}dg.$$

En reprenant la définition des composantes du champ nous avons :

$$\Omega = A^I G_I = A_\mu^I \Theta^\mu G_I.$$

Nous pouvons écrire la transformation de la connexion Ω :

$$(1.3) \quad \Omega' = A_\mu^I G_I \Theta^{\mu'} = \text{adj}(g^{-1}) A_\mu^I G_I \Theta^\mu + g^{-1} \partial_\mu g \Theta^\mu.$$

D'autre part, à ce changement de section locale de l'espace fibré principal $E(V_4, G, p)$ correspond par la projection H un changement local de repère tangent à V_4 qui s'exprime par

$$\Theta^\mu = \lambda^\mu_{\mu'} \Theta^{\mu'}$$

où λ est la matrice de changement de base

$$\lambda(x) = (\lambda^\mu_{\mu'}) = H(z(x)) = h(g(x)).$$

Les matrices Ω_μ se transforment donc suivant la formule :

$$(1.4) \quad \Omega_{\mu'} = A_\mu^I G_I = \lambda^\mu_{\mu'} \text{adj}(g^{-1}) A_\mu^I G_I + \lambda^\mu_{\mu'} g^{-1} \partial_\mu g.$$

Pour un changement infinitésimal de section locale de $E(V_4, G, p)$ exprimé par

$$g(x) = e + \delta g(x) = e + \delta \xi^I(x) \cdot G_I$$

où $\delta \xi^I(x)$ sont des fonctions infinitésimales sur un ouvert $U \subset V_4$, nous allons déduire la loi de transformation infinitésimale pour les composantes du champ de Yang et Mills.

Posons

$$(1.5) \quad A_{\mu'}^I = \delta_{\mu'}^\mu (A_\mu^I + \delta A_\mu^I).$$

Étant donné l'homomorphisme H , nous pouvons écrire

$$\lambda_{\mu'}^\mu = \delta_{\mu'}^\mu + \delta \lambda_{\mu'}^\mu.$$

Nous avons alors :

$$(1.6) \quad \delta_{\mu'}^\mu (A_\mu^I + \delta A_\mu^I) G_I = (\delta_{\mu'}^\mu + \delta \lambda_{\mu'}^\mu) \text{adj}(g^{-1}) A_\mu^I G_I + (\delta_{\mu'}^\mu + \delta \lambda_{\mu'}^\mu) g^{-1} \partial_\mu \delta \xi^I G_I,$$

avec

$$\mu, \mu' = 0, \dots, 3 \quad \text{et} \quad I, J, K, \dots = 1, \dots, N$$

ou bien en laissant uniquement la partie principale :

$$\delta_{\mu'}^\mu A_\mu^I G_I + \delta_{\mu'}^\mu \delta A_\mu^I G_I = (\delta_{\mu'}^\mu + \delta \lambda_{\mu'}^\mu) A_\mu^I g^{-1} G_I g + \delta_{\mu'}^\mu g^{-1} \partial_\mu \delta \xi^I G_I.$$

Finalement nous obtenons la loi de transformation infinitésimale des composantes du champ de Yang et Mills :

$$(1.7) \quad \delta A_\mu^I = A_\mu^K \delta \xi^{KL} C_{KL}^I + \delta \lambda_\mu^\nu A_\nu^I + \partial_\mu \delta \xi^I.$$

CHAPITRE II

QUELQUES EXEMPLES DE CHAMPS DE YANG ET MILLS

Nous traitons dans ce chapitre trois champs de Yang et Mills particuliers :

- 1) Le champ de Yang et Mills associé au produit direct du groupe de Lorentz homogène complet et du groupe de rotations $L(4) \times O(3)$.
- 2) Le champ de Yang et Mills associé au groupe de Weyl engendré par le groupe de Poincaré et le groupe à un paramètre des dilatations.
- 3) Le champ de Yang et Mills associé au groupe conforme $C_0(4)$ engendré par le groupe de Poincaré (9 paramètres), le groupe des dilatations (1 paramètre) et les accélérations (4 paramètres).

Avant d'aborder cette étude, rappelons brièvement les raisons qui nous amènent à considérer précisément ces trois cas.

La théorie des champs de type Yang et Mills est conçue pour rendre compte des phénomènes d'interactions de champs de particules et se doit donc, comme toute théorie qui se respecte, de prendre en considération des lois de conservation. Yang et Mills ont basé leur théorie sur le groupe des rotations de l'espace à trois dimensions lié à la conservation de l'isospin. Il est donc naturel de construire un champ de Yang et Mills associé au groupe $L(4) \times O(3)$ qui est simplement la version relativiste du champ classique. L'introduction du groupe de Lorentz entraîne une relativisation de l'isospin.

L'introduction d'autres lois de conservation telles que la conservation de l'hypercharge et du nombre baryonique force les théoriciens à utiliser d'autres groupes d'invariance, plus larges que le groupe de rotations, par exemple $SU(3)$ [7].

Pour compléter la théorie en rendant compte des propriétés dites « externes » des particules, on utilise fréquemment le groupe de Poincaré.

Notre second exemple est le champ de Yang et Mills associé au groupe de Weyl. Dans ce cas, le groupe d'invariance de la théorie est évidemment plus large. Il englobe la loi de conservation du spin relativiste, du moment d'énergie (grâce aux translations) ainsi qu'il nous donne une possibilité de changement global d'échelle par l'introduction du groupe (à 1 paramètre) des dilatations.

Le groupe conforme introduit des transformations supplémentaires (par rapport au groupe de Weyl) qui sont généralement appelées accélérations. Ce sous-groupe à quatre paramètres nous autorise à effectuer un changement local d'échelle (dépendant du point de l'espace-temps V_4). Le groupe conforme peut être considéré comme un groupe d'invariance globale de la théorie.

1. Champ de Yang et Mills sur un espace-temps courbe [25].

Nous calculons ici la transformation infinitésimale du champ de Yang et Mills associé au fibré principal de groupe structural le produit direct de $L(4)$ et du groupe des rotations de l'espace à trois dimensions $O(3)$.

L'homomorphisme h du groupe $L(4) \times O(3)$ sur le groupe de Lorentz $L(4)$ se réduit à la projection canonique du groupe $L(4) \times O(3)$ de noyau $O(3)$.

L'algèbre de Lie du groupe $L(4) \times O(3)$ admet la décomposition en somme directe :

$$\mathfrak{A}(G) = \mathfrak{A}(L(4)) \oplus \mathfrak{A}(O(3)).$$

Nous prenons une base adaptée à cette décomposition. Les éléments G_I de cette base sont divisés en trois types notés $G_{a'}$, $G_{a''}$, $G_{a'''}$, où a' , a'' , $a''' = 1, 2, 3$. Ils sont choisis de manière à ce que $G_{a'}$, $G_{a''}$ constituent une base de $\mathfrak{A}(L(4))$. Ils satisfont donc aux relations de commutation suivantes [26] :

$$(2.1) \quad \begin{aligned} [G_{a'}, G_{b'}] &= \text{sgn}(a', b', c') G_{c'} \\ [G_{a''}, G_{b''}] &= \text{sgn}(a'', b'', c') G_{c''} \\ [G_{a'}, G_{b''}] &= \text{sgn}(a', b'', c'') G_{c''}. \end{aligned}$$

Les $G_{a''}$ constituent une base de $\mathfrak{A}(O(3))$ avec les relations de commutation :

$$(2.2) \quad [G_{a'''}, G_{b'''}] = \text{sgn}(a''', b''', c''') G_{c'''}$$

La décomposition de l'algèbre de Lie du groupe en somme directe entraîne de plus les relations de commutation :

$$(2.3) \quad [G_{a'}, G_{a''}] = [G_{a''}, G_{a'''}] = 0.$$

L'homomorphisme canonique h de G sur $L(4)$ induit l'homomorphisme canonique h' d'algèbre de Lie :

$$\mathfrak{A}(G) \xrightarrow{h'} \mathfrak{A}(L(4)).$$

Nous pouvons définir l'application h' de la manière suivante :

$$h'(G_I \delta \xi^I) = G_{a'} \delta \xi^{a'} + G_{a''} \delta \xi^{a''}$$

où

$$I = 1, \dots, 6 \quad \text{et} \quad a', a'' = 1, 2, 3.$$

En notant $(G_{a'})^\nu_\mu$ et $(G_{a''})^\nu_\mu$ les composantes de la représentation $G_{a'}$, $G_{a''}$ dans un repère naturel associé aux coordonnées locales $\{x^\alpha\}$, nous obtenons les composantes du champ de Yang et Mills :

$$A^I_\nu \delta \lambda^\nu_\mu = A^I_\nu [(G_{a'})^\nu_\mu \delta \xi^{a'} + (G_{a''})^\nu_\mu \delta \xi^{a''}].$$

Nous voulons trouver la loi de transformation infinitésimale des composantes du champ de Yang et Mills et nous avons établi dans le chapitre I la formule générale pour un champ de Yang et Mills associé à un groupe de Lie quelconque G :

$$(2.4) \quad \delta A^I_\mu = A^K_\mu \delta \xi^K C^K_I + \delta \lambda^\nu_\mu A^I_\nu + \partial_\mu \delta \xi^I.$$

Nous calculons donc chaque terme de (2.4) pour le groupe $L(4) \times O(3)$. Les relations de commutation (2.1), (2.2) et (2.3) nous permettent d'écrire immédiatement le premier terme de la transformation (2.4).

Nous avons donc :

$$\begin{aligned} C_J^{a'} K A_\mu^J \delta_\xi^K &= \operatorname{sgn}(a', b', c') A^{b'}_\mu \delta_\xi^{c'} - \operatorname{sgn}(a', b'', c'') \cdot A^{b''}_\mu \delta_\xi^{c''}, \\ C_J^{a''} K A_\mu^J \delta_\xi^K &= \operatorname{sgn}(a'', b', c'') [A^{b'}_\mu \delta_\xi^{c''} - A^{c''}_\mu \delta_\xi^{b'}], \\ C_J^{a'''} K A_\mu^J \delta_\xi^K &= \operatorname{sgn}(a''', c''', b''') A^{b'''}_\mu \delta_\xi^{c'''}. \end{aligned}$$

Le second terme étant déjà établi, nous groupons les résultats et nous trouvons la loi de transformation infinitésimale du champ de Yang et Mills sur un espace-temps courbe qui est la suivante :

$$\begin{aligned} \delta A^{a'}_\mu &= A^{a'}_\nu [(G_{b'})^\nu_\mu \delta_\xi^{b'} + (G_{b''})^\nu_\mu \delta_\xi^{b''}] + \operatorname{sgn}(a', b', c') A^{b'}_\mu \delta_\xi^{c'} \\ &\quad - \operatorname{sgn}(a', b'', c'') A^{b''}_\mu \delta_\xi^{c''} + \partial_\mu \delta_\xi^{a'}, \\ (2.5) \quad \delta A^{a''}_\mu &= A^{a''}_\nu [(G_{b'})^\nu_\mu \delta_\xi^{b'} + (G_{b''})^\nu_\mu \delta_\xi^{b''}] + \operatorname{sgn}(a'', b', c'') \\ &\quad \cdot (A^{b'}_\mu \delta_\xi^{c''} - A^{c''}_\mu \delta_\xi^{b'}) + \partial_\mu \delta_\xi^{a''}, \\ \delta A^{a'''}_\mu &= A^{a'''}_\nu [(G_{b''})^\nu_\mu \delta_\xi^{b'} + (G_{b'''})^\nu_\mu \delta_\xi^{b'''}] + \operatorname{sgn}(a''', b''', c''') A^{b'''}_\mu \delta_\xi^{c'''} \\ &\quad + \partial_\mu \delta_\xi^{a'''}. \end{aligned}$$

Il est facile de montrer que cette formule englobe l'expression obtenue par Yang et Mills [1]. En effet, un changement de section locale infinitésimal du fibré principal $E(V_4, G, p)$ tel que

$$h(g(x)) = I \quad (\text{identité de } L(4))$$

entraîne que dans la base choisie de l'algèbre de Lie du groupe G nous avons :

$$\delta_\xi^{a'} = \delta_\xi^{a''} = 0$$

c'est-à-dire

$$\delta A^{a'}_\mu = \delta A^{a''}_\mu = 0.$$

La transformation infinitésimale (2.5) se réduit alors à l'expression

$$\delta A^{a'''}_\mu = \operatorname{sgn}(a''', b''', c''') A^{b'''}_\mu \delta_\xi^{c'''} + \partial_\mu \delta_\xi^{a'''}. \quad .$$

Ce résultat est exactement celui obtenu par Yang et Mills dans le cas où le champ est défini dans un espace de dimension 3, donc associé uniquement au groupe de rotations $O(3)$.

§ 2. Champ de Yang et Mills associé au groupe de Weyl [27].

Comme second exemple d'application de la méthode mathématique exposée dans le chapitre I, nous calculons la transformation infinitésimale des composantes du champ de Yang et Mills associé au groupe de Weyl.

On peut définir le groupe de Weyl comme le groupe des transformations de l'espace-temps défini en coordonnées locales par

$$(2.6) \quad X'^{\mu} = \lambda A^{\mu}_{\nu} X^{\nu} + b^{\mu} \quad , \quad \lambda > 0$$

où (A^{μ}_{ν}) appartient au groupe de Lorentz homogène complet $L(4)$, les expressions b^{μ} définissent le groupe des translations T et λ définit le groupe des dilatations D . λ est toujours positif pour des raisons de causalité, λ négatif donnerait des transformations bizarres qui ne pourraient être considérées dans une théorie physique.

Pour trouver la loi de transformations infinitésimales des composantes du champ associé au groupe de Weyl W , nous pouvons utiliser la même méthode que pour le groupe $L(4) \times O(3)$ car il existe un homomorphisme canonique h du groupe W sur son sous-groupe $L(4)$. L'espace fibré principal $E(V_4, W, p)$ se projette donc naturellement sur l'espace fibré des repères orthonormés $\mathcal{E}(V_4)$. Nous pouvons alors introduire sur $E(V_4, W, p)$ une connexion infinitésimale qui, comme nous l'avons montré dans le chapitre I, définit un champ de Yang et Mills.

Nous considérons l'algèbre de Lie du groupe de Weyl $\mathfrak{U}(W)$. C'est un espace vectoriel de dimension 11. Une base de $\mathfrak{U}(W)$ peut être définie de la manière suivante.

Soit $\{G_i\}$ une base de $\mathfrak{U}(W)$ formée par les générateurs infinitésimaux de W .

- $\{G_{a'}, G_{a''}\}$ définit une base canonique de $\mathfrak{U}(L(4))$ avec $a', a'' = 1, 2, 3$;
- $\{G_{a'''}, G_{0'''}\}$ définit une base canonique de l'algèbre de Lie du groupe des translations $\mathfrak{U}(T)$; $a''' = 1, 2, 3$;
- $\{G_0\}$ définit une base canonique de l'algèbre de Lie du groupe des dilatations $\mathfrak{U}(D)$.

En prenant une représentation infinitésimale du groupe de Weyl de la forme suivante

$$A_{\mu} = g_{\nu\rho} x^{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - g_{\mu\rho} x^{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} ,$$

$$T_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \quad , \quad D_0 = x^{\rho} \frac{\partial}{\partial x^{\rho}} ,$$

où les A_μ définissent les générateurs $G_{a'}$, $G_{a''}$, T_μ les générateurs $G_{a'''}$, $G_{0'''}$ et D_0 le générateur G_0 , nous trouvons les relations de commutation de l'algèbre de Lie du groupe de Weyl :

$$(2.7) \quad \begin{aligned} [G_0, G_{a'}] &= [G_0, G_{a''}] = 0, \quad [G_0, G_{0'''}] = -G_{0'''} \quad , \quad [G_0, G_{a'''}] = -G_{a'''} \\ [G_{a''}, G_{b''}] &= -\operatorname{sgn}(a'', b'', c') G_{c'} \quad , \quad [G_{a''}, G_{b'}] = \operatorname{sgn}(a'', b', c'') G_{c''}, \\ [G_{a''}, G_{0'''}] &= G_{a'''} \quad , \quad [G_{a''}, G_{b'''}] = \delta_{a''b'''} G_{0'''}, \\ [G_{a'}, G_{0'''}] &= 0 \quad , \quad [G_{a'''}, G_{b'''}] = 0 \quad , \quad [G_{a'''}, G_{0'''}] = 0 \end{aligned}$$

l'homomorphisme canonique h de W sur $L(4)$ induit un homomorphisme h' de $\mathfrak{A}(W)$ sur $\mathfrak{A}(L(4))$:

$$(2.8) \quad h'(G_1 \delta \xi^I) = G_{a'} \delta \xi^{a'} + G_{a''} \delta \xi^{a''}.$$

Soient (A_μ^J) les composantes du champ de Yang et Mills dans les coordonnées locales $\{x^\alpha\}$. La transformation infinitésimale du champ s'exprime par la formule

$$\delta A_\mu^I = A_\nu^I \delta \lambda_\mu^\nu + C_J^I A_K^J \delta \xi^K + \partial_\mu \delta \xi^I.$$

Notons $(G_{a'})_\mu^\nu$, $(G_{a''})_\mu^\nu$ les composantes de la représentation $\{G_{a'}; G_{a''}\}$ dans le repère naturel associé aux coordonnées $\{x^\alpha\}$.

La loi de transformation infinitésimale des composantes du champ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \delta A_\mu^{a'} &= A_\nu^{a'} [(G_{b'})_\mu^\nu \delta \xi^{b'} + (G_{b''})_\mu^\nu \delta \xi^{b''}] + \operatorname{sgn}(a', b', c') A_\mu^{b'} \delta \xi^{a'} \\ &\quad - \operatorname{sgn}(a', b'', c'') A_\mu^{b''} \delta \xi^{c''} - A_\mu^0 \left(\delta \xi^0 + \sum_{c'''=1}^3 \delta \xi^{c'''} + \delta \xi^{0'''} \right) + \partial_\mu \delta \xi^{a'}; \\ \delta A_\mu^{a''} &= A_\nu^{a''} [(G_{b'})_\mu^\nu \delta \xi^{b'} + (G_{b''})_\mu^\nu \delta \xi^{b''}] + \operatorname{sgn}(a'', b', c'') A_\mu^{b'} \delta \xi^{a''} \\ &\quad + \operatorname{sgn}(a'', b'', c') A_\mu^{b''} \delta \xi^{c'} + \left(\sum_{b'''=1}^3 A_\mu^{b'''} - A_\mu^{0'''} \right) \delta \xi^0 \\ &\quad - A_\mu^0 \left(\sum_{c=1}^3 \delta \xi^{c'''} - \delta \xi^{0'''} \right) + \partial_\mu \delta \xi^{a''}; \\ \delta A_\mu^0 &= A_\nu^0 [(G_{b'})_\mu^\nu \delta \xi^{b'} + (G_{b''})_\mu^\nu \delta \xi^{b''}] + \left(\sum_{b=1}^3 A_\mu^{b''} + A_\mu^{0'''} \right) \delta \xi^0 \\ &\quad - A_\mu^0 \left(\sum_{c=1}^3 \delta \xi^{c'''} + \delta \xi^{0'''} + \partial_\mu \delta \xi^0 \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta A^{a'''}_{\mu} &= A^{a'''}_{\nu} [(G_{b'})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b''}] - \operatorname{sgn}(a''', b', c''') A^{b'}_{\mu} \\
&\quad \cdot \delta \xi^{c'''} + \sum_{b''=1}^3 A^{b''}_{\mu} \delta \xi^{0'''} - \operatorname{sgn}(a''', b''', c') A^b_{\mu} \delta \xi^{c'} + \sum_{b'''=1}^3 A^{b'''}_{\mu} \delta \xi^0 \\
&\quad - A^0_{\mu} \left(\sum_{c''=1}^3 \delta \xi^{c''} - \delta \xi^0 \right) - A^0_{\mu} \left(\sum_{c'''=1}^3 \delta \xi^{c'''} + \delta \xi^0 \right) + \partial_{\mu} \delta \xi^{a'''}; \\
\delta A^{0'''}_{\mu} &= A^{0'''}_{\nu} [(G_{b'})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b''}] + \sum_{b=1}^3 (A^{b''}_{\mu} \delta \xi^{b'''} - A^{b'''}_{\mu} \delta \xi^{b''}) \\
&\quad + \left(\sum_{b=1}^3 A^{b'''}_{\mu} + A^{0'''}_{\mu} \right) \delta \xi^0 - A^0_{\mu} \left(\sum_{c=1}^3 \delta \xi^{c'''} - \delta \xi^{0'''} \right) + \partial_{\mu} \delta \xi^{0'''}.
\end{aligned}$$

Nous nous limitons maintenant au sous-groupe G du groupe de Weyl défini par :

$$G = L(4) \otimes D$$

Une base de l'algèbre de Lie $\mathfrak{A}(G)$ est constitué d'une base canonique de $\mathfrak{A}(L(4))$ et d'une base canonique de $\mathfrak{A}(D)$.

$\mathfrak{A}(G)$ admet ici une décomposition en somme directe :

$$\mathfrak{A}(G) = \mathfrak{A}(L(4)) \oplus \mathfrak{A}(D).$$

La forme de la connexion infinitésimale sur l'espace fibré principal $E(V_4, G, p)$ s'écrit ici :

$$\Omega_{\mu} = G_{a'} A^{a'}_{\mu} + G_{a''} A^{a''}_{\mu} + G_0 A^0_{\mu}.$$

Les relations (2.10) nous donnent la transformation infinitésimale du champ de Yang et Mills associé au groupe G :

$$\begin{aligned}
\delta A^{a'}_{\mu} &= A^{a'}_{\nu} [(G_{b'})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b''}] + \operatorname{sgn}(a', b', c') A^{b'}_{\mu} \delta \xi^{c'} \\
&\quad - \operatorname{sgn}(a', b', c') A^{b''}_{\mu} \delta \xi^{c''} - A^0_{\mu} \delta \xi^0 - \partial_{\mu} \delta \xi^{a'}; \\
(2.11) \quad \delta A^{a''}_{\mu} &= A^{a''}_{\nu} [(G_{b'})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b''}] + \operatorname{sgn}(a'', b', c'') A^{b'}_{\mu} \delta \xi^{c''} \\
&\quad + \operatorname{sgn}(a'', b'', c') A^{b''}_{\mu} \delta \xi^{c'} + \partial_{\mu} \delta \xi^{a''}; \\
\delta A^0_{\mu} &= A^0_{\nu} [(G_{b'})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})^{\nu}_{\mu} \delta \xi^{b''}] + \partial_{\mu} \delta \xi^0.
\end{aligned}$$

En effectuant un changement de section locale de $E(V_4, G, p)$ au-dessus de V_4 tel que

$$h(g(x)) = I \quad (I \text{ identité de } L(4)),$$

dans la base de l'algèbre de Lie du groupe G nous avons :

$$\delta \xi^{a'} = \delta \xi^{a''} = 0$$

ce qui entraîne pour les transformations infinitésimales des composantes du champ :

$$\delta A_{\mu}^{a'} = \delta A_{\mu}^{a''} = 0.$$

La transformation (2.11) se réduit alors aux formules

$$(2.12) \quad \delta A_{\mu}^0 = \partial_{\mu} \delta \xi^0, \quad \delta A_{\mu}^{a'} = -A_{\mu}^0 \delta \xi^0.$$

Nous pouvons définir également un champ de Yang et Mills « généralisé » en utilisant le groupe produit direct :

$$G = L(4) \times O(3) \times D.$$

Pour écrire la transformation infinitésimale du champ dans ce cas, nous définissons de même que précédemment une base canonique de l'algèbre de Lie du groupe G :

$$\{G_a, G_{a''}, G_{a''''}, G_0\}$$

où $G_a, G_{a''}, G_0$ sont définis par les relations (2.7) et $G_{a''''}$ définit la base canonique de l'algèbre de Lie du groupe des rotations $O(3)$ ($a'''' = 1, 2, 3$) vérifiant les relations de commutation (2.1), (2.7) et de plus :

$$(2.13) \quad [G_{a''''}, G_{b''''}] = \text{sgn}(a''', b''', c''') G_{c''''}, \quad [G_0, G_{a''''}] = 0$$

En tenant compte des relations (2.12) et (2.13) nous obtenons la transformation infinitésimale du champ de Yang et Mills « généralisé » :

$$\begin{aligned} \delta A_{\mu}^{a'} &= A_{\nu}^{a'} [(G_{b'})_{\mu}^{\nu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})_{\mu}^{\nu} \delta \xi^{b''}] + \text{sgn}(a', b', c') A_{\mu}^{b'} \delta \xi^{c'} \\ &\quad - \text{sgn}(a', b'', c'') \delta \xi^{c''} A_{\mu}^{b''} - A_{\mu}^0 \delta \xi^0 + \partial_{\mu} \delta \xi^{a'}; \\ \delta A_{\mu}^{a''} &= A_{\nu}^{a''} [(G_{b'})_{\mu}^{\nu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})_{\mu}^{\nu} \delta \xi^{b''}] + \text{sgn}(a'', b', c'') A_{\mu}^{b'} \delta \xi^{c''} \\ &\quad + \text{sgn}(a'', b'', c') A_{\mu}^{b''} \delta \xi^{c'} + \partial_{\mu} \delta \xi^{a''}; \\ \delta A_{\mu}^{a''''} &= A_{\nu}^{a''''} [(G_{b'})_{\mu}^{\nu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})_{\mu}^{\nu} \delta \xi^{b''}] + \text{sgn}(a'''', b''', c''') \\ &\quad \cdot A_{\mu}^{b''''} \delta \xi^{c''''} + \partial_{\mu} \delta \xi^{a''''}; \\ \delta A_{\mu}^0 &= A_{\nu}^0 [(G_{b'})_{\mu}^{\nu} \delta \xi^{b'} + (G_{b''})_{\mu}^{\nu} \delta \xi^{b''}] + \partial_{\mu} \delta \xi^0. \end{aligned}$$

Nous pouvons également, comme dans les cas précédents faire un changement de section locale de $E(V_4, G, p)$ au-dessus de V_4 tel que $h(g(x)) = I$ (identité de $L(4)$). Cela entraîne dans la base choisie de $\mathfrak{U}(G)$:

$$\delta \xi^{a'} = \delta \xi^{a''} = 0$$

donc

$$\delta A_{\mu}^{a'} = -A_{\mu}^0 \delta \xi^0, \quad \delta A_{\mu}^{a''} = 0.$$

Nous obtenons alors une transformation infinitésimale particulière que nous décrivons par les formules suivantes :

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \delta A^{a'}_{\mu} &= -A^0_{\mu} \delta \xi^0, & \delta A^0_{\mu} &= \partial_{\mu} \delta \xi^0, \\ \delta A^{a'''}_{\mu} &= \operatorname{sgn}(a'', b'', c'') A^{b'''}_{\mu} \delta \xi^{c'''} + \partial_{\mu} \delta \xi^{a'''} \end{aligned}$$

Ceci peut être interprété comme la transformation infinitésimale d'un champ de Yang et Mills « généralisé » sur un espace-temps courbe. Les composantes supplémentaires sont dues à l'introduction des dilatations.

CHAPITRE III

CHAMP DE YANG ET MILLS ASSOCIÉ AU GROUPE CONFORME

§ 1. Introduction du groupe conforme [29].

La méthode mathématique utilisée dans les chapitres précédents pour définir un champ de Yang et Mills était basée sur la construction d'espaces fibrés principaux dont le groupe structural G contenait le groupe de Lorentz homogène complet comme sous-groupe distingué. Ce formalisme ne peut être appliqué dans le cas d'un champ de Yang et Mills associé au groupe conforme. En effet, ce groupe contient le groupe $L(4)$ mais il n'existe pas d'homomorphisme canonique du groupe conforme sur $L(4)$.

Soit $C_0(4)$ le groupe des transformations conformes de l'espace affine minkowskien transformant la métrique minkowskienne en métriques minkowskiennes. $C_0(4)$ est appelé le groupe conforme spécial (la composante connexe). Il peut être défini [8] dans l'espace de Minkowski réel par les transformations du groupe de Lorentz inhomogène (groupe de Poincaré)

$$x'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} x_{\nu} + b_{\mu}$$

où

$$\Lambda^{\nu}_{\mu} \in L(4)$$

et par les transformations

$$x'_{\mu} = (1 + \lambda a^{\rho} x_{\rho} + \lambda^2 a^2 x^2)^{-1} (\lambda x_{\mu} + \lambda^2 a_{\mu} x^2)$$

où

$$x^2 = g^{\mu\nu} x_{\mu} x_{\nu} \quad \text{et} \quad a^2 = g^{\mu\nu} a_{\mu} a_{\nu}, \quad \lambda > 0.$$

$C_0(4)$ est un groupe à 15 paramètres, 10 paramètres pour le groupe de

Poincaré, 4 pour les « accélérations » a_μ et 1 paramètre pour la dilatation $\lambda x_\mu = x'_\mu$.

La méthode utilisée pour définir un champ de Yang et Mills est beaucoup plus générale que celle introduite précédemment pour des groupes de Lie se décomposant en produit direct de $L(4)$ et d'autres sous-groupes. Dans le cadre du formalisme que nous allons décrire dans les paragraphes suivants le champ se trouve défini non seulement pour le groupe conforme, mais également pour un groupe de Lie quelconque contenant $L(4)$ comme sous-groupe non distingué.

Nous pouvons donc considérer les champs étudiés dans le chapitre précédent comme des cas particuliers de cette théorie plus générale.

On sait que l'algèbre de Lie du groupe $C_0(4)$ est localement isomorphe à l'algèbre de Lie du groupe des rotations $O(2, 4)$ [9, 10] c'est-à-dire

$$\mathfrak{U}(C_0(4)) \approx \mathfrak{U}(O(2, 4)).$$

Cela nous permet de définir un champ de Yang et Mills associé au groupe conforme $C_0(4)$. La méthode employée est la suivante. Nous construisons un espace fibré principal de groupe structural $O(2, 4)$ sur lequel nous définissons une connexion. Nous pouvons alors définir un champ de Yang et Mills d'après la méthode exposée dans le premier chapitre.

§ 2. Construction d'un espace fibré principal $E(V_4, O(2, 4), p)$.

Soit V_4 l'espace-temps de la relativité générale muni de sa métrique hyperbolique normale. $\mathbb{R}^2$ étant l'espace vectoriel numérique muni d'une forme quadratique g_0 de signature (1, 1), $\mathbf{V} \times \in V_4$ considérons l'espace vectoriel

$$(3.1) \quad T'_x = T_x + \mathbb{R}^2$$

muni de la forme quadratique

$$(3.2) \quad g'_x = g_x + g_0.$$

T_x est l'espace vectoriel tangent au point x à V_4 , g_x la forme quadratique définie sur T_x par la métrique.

g_x étant de signature (1, 3) et g_0 de signature (1, 1), g'_x est de signature (2, 4).

Soit $\mathbb{R}'_x$ l'espace des repères orthonormés de T'_x . Il est homéomorphe à $O(2, 4)$. Nous pouvons montrer que l'espace

$$E(V_4) = \bigcup_{x \in V_4} \mathbb{R}'_x$$

admet une structure d'espace fibré principal de base V_4 et de groupe structural $O(2, 4)$ pour la projection p

$$p : E \rightarrow V_x$$

définie par

$$x = p(z) \quad \text{si} \quad z \in \mathbb{R}'_x.$$

Cet espace fibré est une extension triviale de l'espace fibré des repères ortho-normés $\mathcal{E}(V_4)$.

§ 3. Champ de Yang et Mills associé au groupe conforme.

L'espace fibré $E(V_4, O(2, 4)p)$ nous permet de définir un champ de Yang et Mills associé au groupe conforme $C_0(4)$, comme une connexion infinitésimale Ω sur ce fibré.

Nous savons que le groupe $O(2, 4)$ n'admet pas d'homomorphisme surjectif sur $L(4)$. La méthode de calcul des transformations infinitésimales des composantes du champ de Yang et Mills définie dans les chapitres précédents ne peut donc plus être appliquée. Cependant nous pouvons l'adapter de la manière suivante :

Soient $x \rightarrow z(x)$ et $x \rightarrow y(x)$ des sections locales fixées de $E(V_4)$ et $\mathcal{E}(V_4)$ au-dessus d'un ouvert U de V_4 . A l'aide de ces deux sections locales et $\{G_I\}$ étant une base fixée de $\mathfrak{U}(C_0(4))$, le champ de Yang et Mills peut être représenté par des fonctions locales $A^I_\mu(x)$ telles que :

$$\Omega = A^I_\mu \Theta^\mu G_I$$

où les Θ^μ définissent des corepères de la variété V_4 .

§ 4. Loi de transformation infinitésimale des composantes du champ de Yang et Mills associé au groupe conforme.

Un changement de section locale infinitésimale sur l'ouvert U de V_4 peut être considéré comme une application différentielle $\delta\xi$ de U dans $\mathfrak{U}(C_0(4))$. En effet ce changement de section locale s'exprime par une transformation infinitésimale

$$g = e + \delta\xi \quad \text{où} \quad g \in \mathfrak{U}(C_0(4)),$$

d'où

$$g^{-1} = e - \delta\xi;$$

$\delta\xi \in \mathfrak{U}(C_0(4))$ et peut s'écrire dans une base choisie $\{G_I\}$ de $\mathfrak{U}(C_0(4))$

$$\delta\xi = \delta\xi^I G_I \quad \text{où} \quad I = 1, \dots, 15.$$

La matrice de connexion se transformant selon la loi :

$$\Omega' = \text{adj}(g^{-1})\Omega + g^{-1}dg$$

nous pouvons écrire :

$$\Omega' = (e - \delta\xi)\Omega(e + \delta\xi) + (e - \delta\xi)d\delta\xi.$$

En abandonnant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, il vient :

$$(3.3) \quad \Omega' = \Omega + \Omega\delta\xi - \delta\xi \cdot \Omega + d\delta\xi,$$

ou bien

$$(3.4) \quad \delta\Omega = [\Omega, \delta\xi] + d\delta\xi.$$

Considérons la décomposition

$$(3.5) \quad \mathfrak{U}(C_0(4)) = \mathfrak{U}(L(4)) + M$$

où M est le sous-espace engendré par les translations, dilatation et accélérations infinitésimales (inversions). En utilisant la représentation infinitésimale suivante de l'algèbre de Lie du groupe conforme [8] :

$$A_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}x^\rho \frac{\partial}{\partial x^\mu} - g_{\mu\nu}x^\rho \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

$$M_\mu = x^2 \frac{\partial}{\partial x^\mu} - 2g_{\mu\nu}x^\nu x^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho},$$

$$T_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad D_0 = x^\rho \frac{\partial}{\partial x^\rho},$$

on vérifie immédiatement que :

$$[L(4), M] \subset M.$$

Soit ρ la projection de $\mathfrak{U}(C_0(4))$ sur $\mathfrak{U}(L(4))$ parallèlement à M . Alors $\delta\lambda = \rho\delta\xi$ est une application différentiable de U dans $\mathfrak{U}(L(4))$ et définit ainsi un changement de section locale infinitésimal dans $\mathcal{E}(V_4)$. $(\delta\lambda)_\beta^\alpha$ étant la matrice de la transformation $\delta\lambda$ dans la représentation naturelle de $\mathfrak{U}(L(4))$ sur l'espace vectoriel T_x rapportée au repère $y(x)$ nous allons trouver la loi générale de transformation infinitésimale des composantes locales du champ de Yang et Mills.

En effet, soit $\mathfrak{E}(V_4)$ l'espace fibré des repères orthonormés. Un changement de corepère Θ^α dans $\mathfrak{E}(V_4)$ s'exprime par la formule

$$(3.6) \quad \Theta^{\alpha'} = \Theta^\alpha + \delta\lambda^\alpha_\beta \Theta^\beta,$$

ce qui entraîne

$$(3.7) \quad \Theta^\mu = \Theta^{\mu'} - \delta\lambda^\mu_{\mu'} \Theta^{\mu'}.$$

Les matrices de connexion infinitésimale dans les deux repères $\Theta^{\mu'}$ et Θ^μ s'expriment par :

$$(3.8) \quad \Omega' = \Omega'^\mu_{\mu'} \Theta^{\mu'} \quad \text{et} \quad \Omega = \Omega^\mu_\mu \Theta^\mu.$$

Nous introduisons les composantes du champ de Yang et Mills comme dans le chapitre I :

$$\Omega_\mu = A^I_\mu G_I$$

où les G_I forment une base de $\mathfrak{U}(C_0(4))$. Nous pouvons alors réécrire les formules (3.8) :

$$(3.9) \quad \Omega' = A^I_{\mu'} \Theta^{\mu'} G_I \quad \text{et} \quad \Omega = A^I_\mu \Theta^\mu G_I.$$

En substituant (3.9) dans (3.3) nous obtenons :

$$(3.10) \quad A^I_{\mu'} \Theta^{\mu'} G_I = A^I_\mu \Theta^\mu G_I + [A^I_\mu \Theta^\mu G_I, \delta\xi^I G_I] + \partial_\mu \delta\xi^I \Theta^\mu G_I.$$

D'un autre côté, la transformation infinitésimale $A^I_{\mu'}$ peut s'écrire :

$$(3.11) \quad A^I_{\mu'} = \delta^\mu_{\mu'} (A^I_\mu + \delta A^I_\mu).$$

Finalement, en tenant compte des relations (3.6), (3.7) et (3.11) et en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, nous obtenons la formule de transformation infinitésimale des composantes du champ de Yang et Mills :

$$(3.12) \quad \delta A^I_\mu = A^I_\rho \delta\lambda^\rho_\mu + A^I_\mu \delta\xi^K C^I_{JK} + \partial_\mu \delta\xi^I,$$

qui est la même que la loi de transformation obtenue dans le chapitre I.

§ 4. Calcul explicite des formules de transformation infinitésimale des composantes du champ.

Dans $\mathfrak{U}(C_0(4))$ nous choisissons la base suivante :

- $\{G_{a_1}, G_{a_2}\}$ base canonique de $\mathfrak{U}(L(4))$,
- $\{G_0, G_{a_3}, G_{a_4}\}$ base de l'espace vectoriel M associé aux dilatations, translations et accélérations.

Les indices : $a, b = 1, 2, 3$

$\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Cette base satisfait aux relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned}
 (3.13) \quad & [G_{a_1}, G_{b_1}] = \varepsilon_{abc} G_{c_1} \quad ; \quad [G_{a_1}, G_{b_2}] = \varepsilon_{abc} G_{c_2} ; \\
 & \quad \quad \quad [G_{a_2}, G_{b_2}] = -\varepsilon_{abc} G_{c_1} ; \\
 & [G_0, G_{\alpha_3}] = -G_{\alpha_3} \quad ; \quad [G_0, G_{\alpha_4}] = G_{\alpha_4} ; \\
 & [G_{\alpha_3}, G_{\alpha_4}] = [G_{\alpha_4}, G_{\beta_4}] = 0 \quad ; \quad [G_{0_3}, G_{0_4}] = -2G_0 ; \\
 & [G_{a_3}, G_{0_4}] = [G_{a_4}, G_{0_3}] = 2G_{b_2} \quad ; \\
 & [G_{a_3}, G_{b_4}] = 2(\varepsilon_{abc} G_{c_1} + \delta_{ab} G_0) ; \\
 & [G_0, G_{a_1}] = [G_0, G_{a_2}] \quad ; \quad [G_{0_3}, G_{a_1}] = [G_{0_4}, G_{a_1}] = 0 ; \\
 & [G_{0_3}, G_{a_2}] = -G_{a_3} \quad ; \quad [G_{0_4}, G_{a_2}] = -G_{a_4} ; \\
 & [G_{b_3}, G_{a_1}] = \varepsilon_{abc} G_{c_3} \quad ; \quad [G_{b_3}, G_{a_2}] = -\delta_{ab} G_{0_3} ; \\
 & [G_{b_4}, G_{a_1}] = \varepsilon_{abc} G_{c_4} \quad ; \quad [G_{b_4}, G_{a_2}] = -\delta_{ab} G_{0_4}.
 \end{aligned}$$

Procédant de la même façon que dans les cas étudiés précédemment, nous obtenons les formules de transformations infinitésimales suivantes :

$$\begin{aligned}
 (3.14) \quad & \delta A^0_{\mu} = A^1_{\rho} \delta \lambda^{\rho}_{\mu} + 2(A^{a_3}_{\mu} \delta_{ab} \delta \xi^{b_4} - A^{a_4}_{\mu} \delta_{ab} \delta \xi^{b_3}) \\
 & \quad + 2(A^{0_4}_{\mu} \delta \xi^{0_3} - A^{0_3}_{\mu} \delta \xi^{0_4}) + \partial_{\mu} \delta \xi^0 ; \\
 & \delta A^{c_1}_{\mu} = A^1_{\rho} \delta \lambda^{\rho}_{\mu} + A^{a_1}_{\mu} \varepsilon_{abc} \delta \xi^{b_1} - A^{a_2}_{\mu} \varepsilon_{abc} \delta \xi^{b_2} \\
 & \quad + 2(A^{a_3}_{\mu} \varepsilon_{abc} \delta \xi^{b_4} - A^{a_4}_{\mu} \varepsilon_{abc} \delta \xi^{b_3}) + \partial_{\mu} \delta \xi^{c_1} ; \\
 & \delta A^{c_3}_{\mu} = A^1_{\rho} \delta \lambda^{\rho}_{\mu} + \varepsilon_{abc} (A^{a_1}_{\mu} \delta \xi^{b_2} + A^{a_2}_{\mu} \delta \xi^{b_1}) + 2(A^{a_3}_{\mu} \delta^c_a \delta \xi^{0_4} \\
 & \quad - A^{0_4}_{\mu} \delta^c_b \delta \xi^{b_3}) - 2A^{0_3}_{\mu} \delta^c_b \delta \xi^{b_4} + A^{a_4}_{\mu} \delta^c_a \delta \xi^{0_3} + \partial_{\mu} \delta \xi^{c_2} ; \\
 & \delta A^{c_3}_{\mu} = A^1_{\mu} \delta \lambda^{\rho}_{\mu} - A^0_{\mu} \delta^c_b \delta \xi^{b_3} - A^{a_1}_{\mu} \varepsilon_{abc} \delta \xi^{b_3} + A^{a_2}_{\mu} \delta^c_a \delta \xi^{0_3} \\
 & \quad + A^{a_3}_{\mu} \delta^c_a \delta \xi^0 - A^{a_3}_{\mu} \varepsilon_{abc} \delta \xi^{b_1} - A^{0_3}_{\mu} \delta^c_b \delta \xi^{b_2} + \partial_{\mu} \delta \xi^{c_3} ; \\
 & \delta A^{0_3}_{\mu} = A^1_{\rho} \delta \lambda^{\rho}_{\mu} - A^0_{\mu} \delta \xi^{0_3} + A^{a_2}_{\mu} \delta_{ab} \delta \xi^{b_3} - A^{a_3}_{\mu} \delta^b_a \delta \xi^{b_2} \\
 & \quad + A^{0_3}_{\mu} \delta \xi^0 + \partial_{\mu} \delta \xi^{0_3} ; \\
 & \delta A^{a_4}_{\mu} = A^1_{\rho} \delta \lambda^{\rho}_{\mu} + A^0_{\mu} \delta^c_b \delta \xi^{b_4} - A^{a_1}_{\mu} \varepsilon_{abc} \delta \xi^{b_4} + A^{a_2}_{\mu} \delta \xi^{0_4} \\
 & \quad + A^{a_4}_{\mu} \varepsilon_{abc} \delta \xi^{b_3} - A^{a_4}_{\mu} \delta^c_a \delta \xi^0 - A^{0_4}_{\mu} \delta^c_b \delta \xi^{b_2} + \partial_{\mu} \delta \xi^{c_4} ; \\
 & \delta A^{0_4}_{\mu} = A^1_{\rho} \delta \lambda^{\rho}_{\mu} + A^0_{\mu} \delta \xi^{0_4} + A^{a_2}_{\mu} \delta_{ab} \delta \xi^{b_4} - A^{a_4}_{\mu} \delta_{ab} \delta \xi^{b_2} \\
 & \quad - A^{0_4}_{\mu} \delta \xi^0 + \partial_{\mu} \delta \xi^{0_4},
 \end{aligned}$$

où on a écrit

$$\delta \lambda^{\rho}_{\mu} = (G_{b_1})^{\rho}_{\mu} \delta \xi^{b_1} + (G_{b_2})^{\rho}_{\mu} \delta \xi^{b_2}.$$

§ 5. Canonicité du champ de Yang et Mills associé au groupe conforme [29].

Dans les paragraphes précédents nous avons établi la loi de transformation infinitésimale des composantes du champ de Yang et Mills associé au groupe conforme $C_0(4)$ en utilisant la décomposition de l'algèbre de Lie [22]

$$\mathfrak{A}(C_0(4)) = \mathfrak{A}(L(4)) + M$$

vérifiant

$$[\mathfrak{A}(L(4)), M] \subset M.$$

Nous nous proposons de montrer que ces relations caractérisent le sous-espace M et que, par conséquent, la loi de transformation infinitésimale (3.12) est canonique.

Nous utilisons pour faire cette démonstration la base de $\mathfrak{A}(C_0(4))$ définie dans les paragraphes précédents et les relations de commutation (3.13).

Soit M' un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{A}(C_0(4))$ supplémentaire de $\mathfrak{A}(L(4))$ et tel que :

$$(3.15) \quad [\mathfrak{A}(L(4)), M'] \subset M'.$$

Dans M' on définit une base du type $(F_0, F_{\alpha_3}, F_{\alpha_4})$ où :

$$(3.16) \quad \begin{aligned} F_0 &= G_0 + \xi^b G_{b_1} + \eta^b G_{b_2}, \\ F_{\alpha_3} &= G_{\alpha_3} + \lambda^a_{\alpha} G_{a_1} + \mu^b_{\alpha} G_{b_2}, \\ F_{\alpha_4} &= G_{\alpha_4} + \nu^a_{\alpha} G_{a_1} + \sigma^b_{\alpha} G_{b_2}, \end{aligned}$$

avec $a, b = 1, 2, 3$ et $\alpha, \beta = 0, \dots, 3$.

La relation (3.15) se traduit alors par les équations

$$(3.16) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{abc}(\xi^b G_{c_1} + \eta^b G_{c_2}) &= 0, & \varepsilon_{abc}(\xi^b G_{c_2} - \eta^b G_{c_1}) &= 0, \\ & \varepsilon_{abc}(\lambda^a_{\alpha} G_{c_1} - \mu^a_{\alpha} G_{c_2}) &= 0 \\ \varepsilon_{abc}(\lambda^a_{\alpha} G_{c_1} - \mu^a_{\alpha} G_{c_2} + \lambda^a_{\alpha} G_{a_1} + \mu^b_{\alpha} G_{b_2}) &= 0 \\ \varepsilon_{abc}(\lambda^a_{\alpha} G_{c_2} - \mu^a_{\alpha} G_{c_1} + \lambda^a_{\alpha} G_{a_1} + \mu^b_{\alpha} G_{b_2}) &= 0 \\ \delta_{ab}(\lambda^b_{\alpha} G_{b_1} + \mu^b_{\alpha} G_{b_2}) + \varepsilon_{abc}(\lambda^a_{\alpha} G_{c_2} - \mu^a_{\alpha} G_{c_1}) &= 0 \\ \varepsilon_{abc}(\nu^b_{\alpha} G_{c_1} - \sigma^b_{\alpha} G_{c_2}) &= 0 \\ \varepsilon_{abc}(\nu^a_{\alpha} G_{c_1} + \sigma^a_{\alpha} G_{c_2} + \nu^a_{\alpha} G_{a_1} + \sigma^b_{\alpha} G_{b_2}) &= 0 \\ \nu^a_{\alpha} G_{a_1} + \sigma^b_{\alpha} G_{b_2} + \varepsilon_{abc}(\nu^a_{\alpha} G_{c_2} - \sigma^a_{\alpha} G_{c_1}) &= 0 \\ \delta_{ab}(-\nu^a_{\alpha} G_{a_1} - \sigma^a_{\alpha} G_{a_2}) + \varepsilon_{abc}(\nu^a_{\alpha} G_{c_2} - \sigma^a_{\alpha} G_{c_1}) &= 0 \end{aligned}$$

En comparant les coefficients des G nous obtenons :

$$(3.17) \quad \begin{array}{cccc} \xi^b = 0 & \eta^b = 0 & \lambda^a_{\alpha} = 0 & \mu^a_{\alpha} = 0 \\ \lambda^a = 0 & \mu^a = 0 & \nu^b = 0 & \sigma^b = 0 \\ \nu^b_{\alpha} = 0 & \sigma^b_{\alpha} = 0 & & \end{array}$$

d'où nous pouvons conclure que

$$M = M'.$$

La loi de transformation infinitésimale des composantes locales du champ de Yang et Mills associé au groupe conforme est donc canonique.

On peut se demander quel est l'intérêt particulier que nous attachons au champ de Yang et Mills associé au groupe conforme.

Le groupe conforme est un des groupes les plus intéressants de la physique [11]. Tout d'abord c'est le groupe le plus général qui conserve le cône de lumière. Par une transformation conforme de l'espace de Minkowski $ds^2 = 0$ se transforme en $ds'^2 = 0$. Il agit donc comme le groupe de Lorentz en préservant la constante physique absolue qui est la vitesse de la lumière. Mais étant plus large que le groupe de Lorentz, il peut, avec plus de succès, servir de groupe d'invariance d'une théorie physique. D'autre part, la composante connexe de l'identité de $C_0(4)$ est localement isomorphe à $SO(4, 2)$ et à $SU(2, 2)$ ce qui est utile pour l'étude des interactions fortes notamment pour l'étude des spectres de masse [11]. Or nous avons signalé l'importance du champ de Yang et Mills et de ses généralisations pour la théorie des interactions fortes. Un champ de Yang et Mills associé au groupe conforme devrait donc être analysé en détail. Cela apporterait peut-être des résultats intéressants concernant le spectre de masse des quantas du champ ce qui n'est pas fait jusqu'à présent. De plus, le groupe conforme, agissant comme des dilatations locales et globales de la métrique, est un groupe de covariance (au sens habituel) pour des champs de particules de masses nulles. Dans le cas de masses non nulles, nous obtenons également une covariance « généralisée » tenant compte du changement d'échelle.

CHAPITRE IV

ÉQUATIONS DU CHAMP DE YANG ET MILLS

§ 1. Lagrangien d'un champ de Yang et Mills.

Soit $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ un groupe linéaire contenant $L(4)$.

Nous voulons établir les équations du champ de Yang et Mills associé à G en partant d'un principe variationnel. On suppose l'existence d'un fibré principal $E(V_4, G, p)$ sur V_4 de groupe structural G .

La densité du Lagrangien d'un champ de Yang et Mills peut s'écrire [1] :

$$(4.1) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} R^a_{b,\lambda\mu} R^b_{a,\lambda\mu}$$

où

$$a, b = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \lambda, \mu = 0, \dots, 3.$$

$$R = R^a_{b,\lambda\mu}$$

est le tenseur de courbure d'une connexion Ω sur $E(V_4, G, p)$ et s'exprime donc par :

$$(4.2) \quad R^a_{b\lambda\mu} = \partial_\lambda \Omega^a_{b\mu} - \partial_\mu \Omega^a_{b\lambda} + \Omega^a_{c\lambda} \Omega^c_{b\mu} - \Omega^a_{c\mu} \Omega^c_{b\lambda}.$$

Ce Lagrangien, introduit par Yang et Mills dans leur premier article [1] dans le cas $G = L(4) \times O(3)$ est adopté par analogie avec le champ électromagnétique. C'est l'invariant le plus simple qui puisse être construit à partir du champ défini par la connexion Ω sur l'espace-temps V_4 de la relativité générale.

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{L} dv$$

étant l'action du champ sur le domaine D de V_4 , nous exprimerons la nullité de la variation de l'action :

$$\delta \mathcal{A}_{\mathcal{D}} \equiv \int_{\mathcal{D}} \delta \mathcal{L} dx = 0.$$

Calculons la variation du Lagrangien, nous obtenons :

$$\delta \mathcal{L} = [\Omega^c_{a\lambda} (R^{b\lambda\mu}_c - R^{b\mu\lambda}_c) + \Omega^b_{c\lambda} (R^{c\mu\lambda}_a - R^{c\lambda\mu}_a)] \cdot \delta \Omega^a_{b\mu} + [R^{b\lambda\mu}_a - R^{b\mu\lambda}_a] \partial_\lambda (\delta \Omega^a_{b\mu}).$$

Compte tenu de la formule de Stokes, la variation de l'action s'écrit :

$$\delta \mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} \delta \mathcal{L} dv = \int_{\mathcal{D}} [2(\Omega^c_{a\lambda} \cdot R^{b\lambda\mu}_c - \Omega^b_{c\lambda} \cdot R^{c\lambda\mu}_a) + \nabla_\lambda (2R^{b\lambda\mu}_a)] \cdot \delta \Omega^a_{b\mu} dv.$$

Finalement

$$(4.3) \quad \delta \mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} T^{b\mu}_a \cdot \delta \Omega^a_{b\mu} dx$$

où

$$(4.4) \quad T^{b\mu}_a = \nabla_\lambda R^{b\lambda\mu}_a + \Omega^b_{c\lambda} R^{c\lambda\mu}_a - \Omega^c_{a\lambda} R^{b\lambda\mu}_c.$$

En annulant la variation de l'action nous obtenons :

$$(4.5) \quad T^{b\mu}_a \delta \Omega^a_{b\mu} = 0 \quad \nabla \delta \Omega \in \mathfrak{H}(G)$$

$\Omega_\lambda = (\Omega_b^a)_\lambda$ appartenant à l'algèbre de Lie du groupe G , $R_{\lambda\mu} = R^a_{b\lambda\mu}$ appartient également à $\mathfrak{U}(G)$.

Le tenseur

$$T_\mu = T^b_{a\mu} = \nabla_\lambda R^b_{a\lambda\mu} + \Omega_c^b R^c_{a\lambda\mu} - \Omega_a^c R^b_{c\lambda\mu}$$

peut s'écrire :

$$(4.6) \quad T_\mu = \nabla_\lambda R^\lambda_{\mu} + [\Omega_\lambda, R^\lambda_{\mu}]$$

et T_μ appartient donc à $\mathfrak{U}(G)$.

Soit $\{G_I\}$ une base de $\mathfrak{U}(G)$ ($I = 1, \dots, N$). Du raisonnement précédent, il résulte que

$$(4.7) \quad T_\mu = B_\mu^I G_I$$

D'autre part

$$\delta\Omega_\mu = \delta A_\mu^K G_K$$

donc (4.5) s'écrit :

$$B_\mu^I \delta A^{\mu K} G_a^b{}_I G_b^a{}_K = 0$$

ou encore :

$$(4.8) \quad B_\mu^I \delta A^{\mu K} \text{Tr}(G_I G_K) = 0 \quad \forall \delta A^{\mu K}.$$

Nous obtenons donc les équations du champ :

$$(4.9) \quad B_\mu^I \text{Tr}(G_I, G_K) = 0.$$

Soit Φ la forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{U}(G)$ définie par

$$\Phi(A, B) = \text{Tr}(A \cdot B),$$

donc

$$\Phi_{IK} = \Phi(G_I, G_K).$$

Si cette forme est non dégénérée sur $\mathfrak{U}(G)$ les équations du champ se réduisent à

$$(4.10) \quad B_\mu^I = 0 \quad \text{soit} \quad T_\mu = 0.$$

Ceci est vrai en particulier pour $G = SO(p, q)$ car dans ce cas, Φ est proportionnelle à la forme de Killing.

§ 2. Rappels concernant la condition de Lorentz.

Pour compléter le formalisme lagrangien nous introduisons une condition supplémentaire analogue à la condition de Lorentz pour le champ électromagnétique.

Le champ électromagnétique dérive d'un potentiel A défini à un gradient additif près. La condition de Lorentz est introduite pour lever cette ambiguïté [12]. Elle s'écrit :

$$\operatorname{div} A = 0$$

et exprime le fait que le potentiel électromagnétique est conservatif.

Yang et Mills, dans leur premier article [1] introduisent également, dans le cas plat, une condition de ce type :

$$\frac{\partial b_\mu}{\partial x^\mu} = 0$$

où b_μ est le potentiel du champ.

Cette équation complète les équations du champ en éliminant la partie scalaire de celui-ci.

Toutefois Yang et Mills remarquent que la forme même de cette condition impose une restriction sur les transformations de jauge possibles.

En effet, le potentiel du champ de Yang et Mills étant une forme de connexion, la condition supplémentaire de Yang et Mills n'est pas tensorielle et présuppose donc l'existence d'une classe privilégiée de sections du fibré $E(V_4, G, p)$. Cette hypothèse raisonnable sur l'espace-temps de Minkowski, cesse de l'être sur un espace-temps courbe où l'on n'est pas assuré de l'existence de sections globales.

Nous nous proposons d'introduire une condition supplémentaire intrinsèque faisant intervenir la métrique de l'espace-temps.

§ 3. Extension d'une connexion infinitésimale.

Soit $\mathcal{E}(V_4, \pi)$ l'espace fibré des repères orthonormés. G étant un groupe linéaire contenant $L(4)$, soit $E(V_4, G, p)$ un espace fibré principal extension de $\mathcal{E}(V_4, \pi)$.

Soit $J : \mathcal{E}(V_4, \pi) \rightarrow E(V_4, G, p)$ l'extension.

J est une application injective telle que :

$$p \circ J = \pi$$

et d'autre part

$$J(Y \cdot h) = J(Y) \cdot h \quad \forall Y \in \mathcal{E}(V_4, \pi) \quad , \quad h \in L(4).$$

Soit ω une connexion infinitésimale sur $\mathcal{E}(V_4)$. On démontre qu'il existe

une connexion infinitésimale Ω et une seule sur $E(V_4, G, p)$ telle que τ étant un vecteur tangent à $\mathcal{E}(V_4)$:

$$\omega(\tau) = 0 \Rightarrow \Omega(J_\tau) = 0$$

Par définition Ω sera appelé extension de la connexion ω à $E(V_4, G, p)$.

§ 4. Condition supplémentaire.

Soient ω_0 la connexion riemannienne de l'espace-temps V_4 et Ω_0 son extension.

Ω étant une 1-forme de connexion infinitésimale sur $E(V_4, G, p)$ nous lui associons la 1-forme tensorielle

$$U = \Omega - \Omega_0$$

à valeurs dans $\mathfrak{A}(G)$.

A l'aide de la connexion riemannienne ω_0 et de son extension Ω_0 on définit une dérivation covariante $\widehat{\nabla}$ sur les tenseurs à valeur dans $\mathfrak{A}(G)$.

Si X est un p -tenseur, $\widehat{\nabla}X$ est un $(p+1)$ -tenseur à valeurs dans $\mathfrak{A}(G)$.

Nous écrivons la condition supplémentaire relative à la connexion Ω sous la forme :

$$(4.11) \quad \widehat{\nabla}^\lambda U^a_{b\lambda} = 0$$

où

$$a, b = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \lambda = 0, \dots, 3.$$

Lorsque V_4 est plat, il existe des sections globales de $\mathcal{E}(V_4)$ pour lesquelles les coefficients de la connexion ω_0 sont nuls.

Soit

$$\sigma : V_4 \rightarrow \mathcal{E}(V_4)$$

une telle section.

Par définition de Ω_0 , $J \circ \sigma$ est une section globale de $E(V_4, G, p)$ pour laquelle les coefficients de Ω_0 sont nuls.

L'équation (4.11) devient alors :

$$(4.12) \quad \partial^\lambda \Omega_b^a{}_\lambda = 0.$$

Nous retrouvons ici la condition de Yang et Mills analysée plus haut.

CHAPITRE V

QUELQUES SOLUTIONS PARTICULIÈRES DES ÉQUATIONS DU CHAMP DE YANG ET MILLS

Nous nous proposons de trouver des solutions particulières des équations du champ de Yang et Mills associé au groupe de Lorentz homogène complet $L(4)$ sur un espace-temps plat de Minkowski. Sur V_4 nous considérons une section globale du fibré principal pour laquelle la condition supplémentaire prend la forme particulière (4.12).

En raison de l'isomorphisme b de $L(4)$ sur $SO(3, C)$ le problème se ramène à la complexification des solutions trouvées par Yang et Wu [13] pour $SO(3)$.

§ 1. Isomorphisme de $\mathfrak{U}(L(4))$ sur $\mathfrak{U}(SO(3, C))$.

Soit f l'application de $\mathfrak{U}(L(4))$ dans $\mathfrak{U}(SO(3, C))$ définie par :

$$(5.1) \quad f(A) = \begin{pmatrix} 0 & a + ia' & -b - ib' \\ -a - ia' & 0 & c + ic' \\ b + ib' & -c - ic' & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5.2) \quad \nabla A = \begin{pmatrix} 0 & a & -b & c' \\ -a & 0 & c & b' \\ b & -c & 0 & a' \\ c' & b' & a' & 0 \end{pmatrix} \in (L(4)).$$

On vérifie facilement que f est un isomorphisme d'algèbres de Lie et l'application inverse s'écrit :

$$(5.3) \quad f^{-1}(B) = \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Re}(\alpha) & -\operatorname{Re}(\beta) & \operatorname{Im}(\gamma) \\ -\operatorname{Re}(\alpha) & 0 & \operatorname{Re}(\gamma) & \operatorname{Im}(\beta) \\ \operatorname{Re}(\beta) & -\operatorname{Re}(\gamma) & 0 & \operatorname{Im}(\alpha) \\ \operatorname{Im}(\gamma) & \operatorname{Im}(\beta) & \operatorname{Im}(\alpha) & 0 \end{pmatrix}$$

$$(5.4) \quad \nabla B = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & -\beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ \beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \in (SO(3, C)) \quad \alpha, \beta, \gamma \in C.$$

§ 2. Transformation de la connexion et du tenseur de courbure.

Les composantes du champ de Yang et Mills associé au groupe de Lorentz sur un espace-temps plat s'expriment en fonction des coefficients de la connexion Ω à valeurs dans $\mathfrak{U}(L(4))$.

A l'aide de l'isomorphisme f nous transformons la connexion Ω et le tenseur de courbure R :

$$f: \Omega \rightarrow \Omega' \quad , \quad R \rightarrow R'.$$

Les coefficients de la nouvelle connexion Ω' et du tenseur de courbure R' sont à valeurs dans $\mathfrak{U}(\text{SO}(3, \mathbb{C}))$.

Soit la matrice de la connexion Ω à valeurs dans $\mathfrak{U}(\text{L}(4))$. C'est une matrice réelle 4×4 dont les coefficients a^a_b jouissent des propriétés suivantes :

$$(5.5) \quad \begin{aligned} a^i_j &= -a^j_i \\ a^4_i &= a^i_4 \\ a^4_4 &= 0 \end{aligned} \quad \text{où} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Par l'isomorphisme f nous obtenons une matrice 3×3 à coefficients complexes. Ses coefficients sont donnés par les relations :

$$(5.6) \quad \alpha^i_j = a^i_j + i\varepsilon_{ijk}a^4_k \quad \text{où} \quad i, j, k, \dots = 1, 2, 3.$$

A l'aide de l'application inverse f^{-1} on obtient les coefficients α^i_j de la matrice de connexion Ω' en fonction des a^ab :

$$(5.7) \quad a^i_j = \text{Re}(\alpha^i_j) \quad , \quad a^4_k = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \text{Im}_j(\alpha^i_j)$$

Nous obtenons finalement les coefficients de la connexion Ω exprimés à l'aide des coefficients de la connexion Ω' :

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \Omega^i_{j\lambda} &= \text{Re}\Omega'^i_{j\lambda} \\ \Omega^4_{k\lambda} &= \Omega^k_{4\lambda} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \text{Im}\Omega'^i_{j\lambda} \end{aligned}$$

En partant de la formule (5.8), nous calculons facilement les formules de transformation pour le tenseur de courbure. En effet le tenseur de courbure s'exprime à l'aide de la connexion par :

$$(5.9) \quad R^a_{b\lambda\mu} = \partial_\lambda \Omega^a_{b\mu} - \partial_\mu \Omega^a_{b\lambda} + \Omega^a_{c\lambda} \Omega^c_{b\mu} - \Omega^a_{c\mu} \Omega^c_{b\lambda},$$

où

$$\begin{aligned} a, b &= 1, \dots, 4 \\ \lambda, \mu &= 0, \dots, 3. \end{aligned}$$

La transformation (5.8) appliquée à (5.9) nous permet d'obtenir :

$$(5.10) \quad \begin{aligned} R^i_{j\lambda\mu} &= \text{Re}R'^i_{j\lambda\mu} \\ R^4_{j\lambda\mu} &= R^j_{4\lambda\mu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{jlm} \text{Im}R'^l_{m\lambda\mu} \end{aligned}$$

où

$$l, m, i, j = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad \lambda, \mu = 0, \dots, 3.$$

§ 3. Invariance des équations du champ de Yang et Mills pour l'isomorphisme f .

Rappelons que les équations du champ de Yang et Mills s'écrivent

$$(5.11) \quad T_a^{b\mu} = \nabla_\lambda R_a^{b\lambda\mu} + \Omega_c^b R_c^{\lambda\mu} - \Omega_a^c R_c^{b\lambda\mu} = 0$$

avec la condition supplémentaire

$$\partial^\lambda \Omega_b^a{}_\lambda = 0$$

d'où :

$$\begin{aligned} T_{j\mu}^i &\equiv \nabla_\lambda R_i^{j\lambda\mu} - \Omega_i^k R_k^{j\lambda\mu} - \Omega_i^4 R_4^{j\lambda\mu} + \Omega_k^j R_k^{i\lambda\mu} + \Omega_4^j R_4^{i\lambda\mu}, \\ T_i^{4\mu} &\equiv \nabla_\lambda R_i^{4\lambda\mu} - \Omega_i^k R_k^{4\lambda\mu} + \Omega_k^4 R_k^{i\lambda\mu}, \end{aligned}$$

où $i, j, k = 1, 2, 3$ et $\lambda, \mu = 0, \dots, 3$.

Soit en utilisant (5.8) et (5.11) :

$$\begin{aligned} (5.12) \quad T_i^{j\mu} &\equiv \nabla_\lambda (\text{Re} R_i'^{j\lambda\mu}) - \text{Re} \Omega_i'^k R_k'^{j\lambda\mu} \\ &\quad - \frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} Jm \Omega_m'^l \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_{jpq} Jm R_q'^{p\lambda\mu} \\ &\quad + \text{Re} \Omega_k'^j R_k'^{i\lambda\mu} + \frac{1}{2} \varepsilon_{jlm} Jm \Omega_m'^l \cdot \frac{1}{2} \varepsilon_{ipq} Jm R_q'^{p\lambda\mu}, \end{aligned}$$

$$(5.13) \quad T_i^{4\mu} \equiv \frac{1}{2} [\varepsilon_{ilm} Jm (\nabla_\lambda R_m'^{l\lambda\mu}) + \varepsilon_{klm} (\text{Re} \Omega_i'^k \cdot Jm R_m'^{l\lambda\mu} - Jm \Omega_m'^l \cdot \text{Re} R_i'^{k\lambda\mu})].$$

D'un autre côté, posons :

$$(5.14) \quad T'^{j\mu}_i \equiv \nabla_\lambda R'^{j\lambda\mu}_i - \Omega'^k_i R'^{j\lambda\mu}_k + \Omega'^j_k R'^{k\lambda\mu}_i,$$

d'où

$$(5.15) \quad \text{Re} T'^{j\mu}_i \equiv \text{Re} (\nabla_\lambda R'^{j\lambda\mu}_i) - \text{Re} \Omega'^k_i R'^{j\lambda\mu}_k + \text{Re} \Omega'^j_k R'^{k\lambda\mu}_i + Jm \Omega'^k_i R'^{j\lambda\mu}_k - Jm \Omega'^j_k R'^{k\lambda\mu}_i,$$

$$(5.16) \quad Jm T'^{j\mu}_i \equiv \nabla_\lambda (Jm R'^{j\lambda\mu}_i) - Jm R'^{j\lambda\mu}_k \cdot \text{Re} \Omega'^k_i + Jm \Omega'^j_k R'^{k\lambda\mu}_i \cdot \text{Re} R'^{k\lambda\mu}_i - Jm \Omega'^k_i R'^{j\lambda\mu}_k + \text{Re} \Omega'^j_k R'^{k\lambda\mu}_i \cdot Jm R'^{k\lambda\mu}_i.$$

Formons la différence :

$$[T_i^{j\mu} - \text{Re} T'^{j\mu}_i]$$

et

$$\left[T_i^{4\mu} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} Jm T_m'^{l\mu} \right].$$

Nous obtenons alors :

$$(5.17) \quad T_i^{j\mu} - \text{Re} T_i'^{j\mu} \equiv Jm\Omega_i'^k \cdot JmR_k'^{j\lambda\mu} - Jm\Omega_k'^j \cdot JmR_i'^{k\lambda\mu} + \frac{1}{4} \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jpq} (Jm\Omega_m'^l \cdot JmR_q'^{p\lambda\mu} - Jm\Omega_q'^p \cdot JmR_m'^{l\lambda\mu}),$$

et

$$(5.18) \quad T_i^{4\mu} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} JmT_m'^{l\mu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{klm} (\text{Re}\Omega_i'^k \cdot JmR_m'^{l\lambda\mu} - Jm\Omega_m'^l \cdot \text{Re}R_i'^{j\lambda\mu}) - \frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} [-JmR_k'^{j\lambda\mu} \cdot \text{Re}\Omega_i'^k - Jm\Omega_i'^k \cdot \text{Re}R_k'^{j\lambda\mu} + \text{Re}\Omega_k'^j \cdot JmR_i'^{k\lambda\mu} + Jm\Omega_k'^j \cdot \text{Re}R_i'^{k\lambda\mu}).$$

Par un simple calcul nous montrons que les expressions (5.17) et (5.18) sont nulles. Les équations $T = 0$ sont donc transformées par l'isomorphisme f en :

$$T' = 0$$

qui sont les équations du champ de Yang et Mills associées à $SO(3, C)$.

La condition supplémentaire (4.12) se transforme également par l'application f et nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Re}\partial^\lambda \Omega_j'^i &= 0 \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{ilm} Jm\partial^\lambda \Omega_m'^l &= 0 \quad \text{où} \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

soit

$$(5.19) \quad \partial^\lambda \Omega_j'^i = 0.$$

§ 4. Équations du champ de Yang et Mills associé à $SO(3, C)$ dans le cas « statique ».

Considérons le système d'équations du champ de Yang et Mills :

$$(5.20) \quad \begin{aligned} (a) \quad & \partial_\lambda R_i'^{j\lambda\mu} - \Omega_i'^k R_k'^{j\lambda\mu} + \Omega_k'^j R_i'^{k\lambda\mu} = 0 \\ (b) \quad & \partial^\lambda R_i'^j = 0 \end{aligned}$$

où

$$R_i'^{j\lambda\mu} = \partial_\lambda \Omega_i'^j \partial_\mu \Omega_i'^j + \Omega_k'^j \Omega_i'^k - \Omega_k'^j \Omega_i'^k.$$

R' et Ω sont le tenseur de courbure et la connexion infinitésimale associés au fibré principal $E(V_4, SO(3, C))$.

V_4 est supposé plat.

Nous cherchons quelques solutions particulières du système (5.20) pour le cas « statique », c'est-à-dire pour

$$\Omega'_{i0}{}^j = 0 \quad , \quad \partial_0 \Omega'_{k\lambda}{}^j = 0 \quad \text{où} \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Des solutions « statiques » ont déjà été trouvées par Yang et Wu [13] pour un système d'équations du champ de Yang et Mills associé au fibré de groupe structural $O(3)$

Par complexification des résultats de Yang et Wu nous obtenons des solutions de (5.20).

Nous cherchons donc des solutions de la forme

$$(5.21) \quad \Omega'_{jk}{}^i = (\delta_k^i x^j - \delta_j^i x^k) \frac{f(r)}{r}$$

où f est une fonction à valeurs complexes de $r = [(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2]^{1/2}$. Posons pour simplifier :

$$\frac{f(r)}{r} = g(r)$$

$\partial^i \Omega'^i{}_{j\lambda}$ devient alors :

$$\partial^i \Omega'_{j\lambda}{}^i = \partial^i \Omega'_{j\lambda}{}^i = \sum_i \partial_i \Omega'_{j\lambda}{}^i = (\delta_j^i - \delta_j^i) g(r) + (x^i x^j - x^j x^i) \frac{g'(r)}{r} = 0.$$

Le système (5.20) (b) est bien identiquement vérifié pour tout f . Calculons le tenseur de courbure :

$$R'^i{}_{jkl} = (\delta_k^i \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta_{il}) [-2g(r) - r^2 (g(r))^2] + (\delta_k^i x^j x^l - \delta_{jk} x^i x^l - \delta_{il} x^j x^k + \delta_{jl} x^i x^k) \left[-\frac{g'(r)}{r} + (g(r))^2 \right]$$

et posons

$$F(r) = -2g(r) - r^2 [g(r)]^2,$$

$$G(r) = -\frac{g'(r)}{r} + [g(r)^2].$$

La dérivée du tenseur de courbure s'écrit alors :

$$(5.22) \quad \partial_l R'^i{}_{jkl} = (\delta_k^i x^j - \delta_{jk} x^i) \left[\frac{F'(r)}{r} + r(G'(r)) + 3G(r) \right].$$

Les équations (5.20) (a) s'écrivent :

$$(\delta_k^i x^j - \delta_{jk} x^i) \left[\frac{F'(r)}{r} + rG'(r) + 3G(r) + g(r)F(r) \right] = 0$$

et le système (5.20) se ramène à l'équation :

$$\frac{F'(r)}{r} + rG'(r) + 3G(r) + g(r)F(r) = 0.$$

En se ramenant à f nous obtenons :

$$(5.23) \quad f''(r) + 2\frac{f'(r)}{r} - [1 + rf(r)]\left(\frac{2f(r)}{r^2} + \frac{[f(r)]^2}{r}\right) = 0$$

Posons :

$$1 + rf(r) = \Phi(r)$$

soit

$$f(r) = \frac{1}{r}(\Phi(r) - 1).$$

(5.23) s'écrit alors :

$$(5.24) \quad r^2\Phi'' - \Phi(\Phi^2 - 1) = 0.$$

Nous écrivons désormais Φ au lieu de $\Phi(r)$ pour abréger.

a) Posons

$$\Phi = \varphi + i\psi,$$

φ et ψ étant des fonctions réelles de r .

L'équation (5.24) se partage alors en deux équations :

$$(5.25) \quad \begin{aligned} r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} - [\varphi(\varphi^2 - 3\psi^2 - 1)] &= 0 \\ r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} + [\psi(\psi^2 - 3\varphi^2 + 1)] &= 0. \end{aligned}$$

Pour $r \rightarrow +\infty$ nous cherchons des solutions s'écrivant sous forme de sommes de séries formelles

$$(5.26) \quad \varphi = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cdot \frac{1}{r^k}, \quad \psi = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k \cdot \frac{1}{r^k}.$$

Les dérivées secondes s'écrivent alors :

$$(5.27) \quad \begin{aligned} r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)a_k}{r^k} \\ r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k(k+1)b_k}{r^k}. \end{aligned}$$

En substituant (5.26) et (5.27) dans le système (5.25) et en comparant les termes de même ordre k en $\frac{1}{r}$, nous obtenons les relations de récurrence suivantes :

Pour $k = 0$:

$$(5.28) \quad a_0(1 - a_0^3 + 3b_0^2) = 0 \quad , \quad b_0(1 - b_0^2 - 3a_0^2) = 0$$

Pour $k \geq 1$:

$$(5.29) \quad \begin{cases} k(k+1)a_k + a_k - \sum_{l+m+n=k} a_l a_m a_n + 3 \sum_{l+m+n=k} a_l b_m b_n = 0 \\ k(k+1)b_k + b_k + \sum_{l+m+n=k} b_l b_m b_n - 3 \sum_{l+m+n=k} a_l a_m b_n = 0. \end{cases}$$

Analysons le système d'équations (5.28).

Si $a_0 = 0$, la seconde équation se réduit à

$$b_0(1 + b_0^2) = 0$$

soit

$$b_0 = 0$$

En reportant ce résultat dans le système (5.29), nous trouvons

$$a_k = b_k = 0 \quad \forall k \geq 0$$

donc φ et ψ sont identiquement nuls.

Nous retrouvons ainsi une solution singulière triviale

$$\Phi = 0$$

de l'équation (5.24).

Si $a_0 \neq 0$:

$$1 - a_0^2 + 3b_0^2 = 0$$

donc

$$a_0^2 = 1 + 3b_0^2$$

La seconde équation de (5.28) devient alors :

$$b_0(1 + b_0^2 - 3a_0^2) = b_0(1 + b_0^2 - 3 - 9b_0^2) = b_0(-2 - 8b_0^2) = 0$$

soit

$$b_0 = 0$$

d'où

$$a_0 = \pm 1.$$

En reportant ces valeurs dans le système (5.29) on trouve immédiatement que a_1 et b_1 sont des constantes arbitraires et les autres coefficients des développements (5.26) s'écrivent à l'aide de a_1 et b_1 . Nous avons par exemple :

$$(5.30) \quad a_0 = +1 \quad a_2 = \frac{3}{4}(a_1 - b_1^2)$$

Les solutions cherchées sont donc du type

$$(5.31) \quad \begin{aligned} \varphi &= \pm 1 + \frac{c}{r} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \\ \psi &= c' + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}$$

c et c' étant deux constantes réelles arbitraires

$b)$ ε étant un infiniment petit, cherchons des solutions de (5.24) de la forme

$$\Phi = \varphi + i\varepsilon\psi$$

φ et ψ étant des fonctions réelles de r .

Nous avons alors :

$$\begin{aligned} \Phi^2 &= (\varphi + i\varepsilon\psi)^2 = \varphi^2 + 2i\varepsilon\varphi\psi - \varepsilon^2\psi^2 \\ \Phi(\Phi^2 - 1) &= (\varphi + i\varepsilon\psi)(\varphi^2 + 2i\varepsilon\varphi\psi - \varepsilon^2\psi^2) = \varphi^3 - \varphi + i\varepsilon(3\varphi^2\psi - \psi) \end{aligned}$$

en abandonnant les termes en ε^2 et ε^3 .

L'équation (5.24) se sépare en deux équations :

$$(5.32) \quad \begin{aligned} (a) \quad r^2 \frac{d^2\varphi}{dr^2} - \varphi(\varphi^2 - 1) &= 0, \\ (b) \quad r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} - \psi(3\varphi^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

La première de ces équations a été étudiée par Yang et Wu, en posant

$$r = e^\xi$$

ce qui donne

$$(5.33) \quad \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \frac{d\varphi}{d\xi} - \varphi(\varphi^2 - 1) = 0$$

qui est équivalente au système

$$(5.34) \quad \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\xi} &= \eta \\ \frac{d\eta}{d\xi} &= \eta + \varphi(\varphi^2 - 1). \end{aligned}$$

Les points singuliers du système (5,34) sont :

$$(\varphi, \eta) = (0, 0), (1, 0), (-1, 0).$$

L'étude de ce système montre qu'il existe seulement deux familles de solutions bornées non singulières pour tout $0 < r < \infty$ et pour $r \rightarrow +\infty$ ces solutions sont de la forme :

$$\varphi = 1 - \frac{c}{r} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad , \quad \varphi = -1 + \frac{c}{r} + 0\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

où c est une constante arbitraire positive.

Pour $r \rightarrow 0$: $\varphi \rightarrow 0$.

Nous pouvons alors trouver des solutions asymptotiques de l'équation (5.32) (b). Pour φ constant et égal à 0, 1, -1, cette équation s'écrit :

$$\text{Pour } \varphi = 0 : \quad r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} + \psi = 0$$

$$\text{Pour } \varphi = \pm 1 : \quad r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} - 2\psi = 0$$

Posons alors

$$r = e^t \quad 0 < r < +\infty \quad \text{donc} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Pour $\varphi = 0$ nous avons alors :

$$(5.35) \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{d\psi}{dt} + \psi = 0$$

et pour $\varphi = \pm 1$:

$$(5.36) \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{d\psi}{dt} - 2\psi = 0$$

Les solutions de (5.35) sont de la forme [14] :

$$\psi = Ae^{t/2} \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{r} + B\right)$$

soit :

$$\psi = A\sqrt{r} \cos\left(\frac{\sqrt{3} \log(r)}{r} + B\right)$$

par conséquent le système (5.32) n'admet pas de solutions bornées telles que $\varphi = 0$. Les solutions de (5.36) sont :

$$\varphi = Ae^{2t} + Be^{-t}$$

soit

$$\psi = Ar^2 + \frac{B}{r}$$

et les solutions bornées pour $r \rightarrow +\infty$ de (5.32) dans le cas $\varphi = \pm 1$ sont donc :

$$\psi = \frac{B}{r}$$

où B est une constante réelle arbitraire. La solution de l'équation (5.24) dans ce cas est :

$$(5.37) \quad \Phi = \pm 1 + i\varepsilon \frac{B}{r}.$$

Lorsque φ est une solution bornée non singulière de (5.32) (a) nous obtenons facilement le comportement asymptotique de ψ solution bornée de (5.32) (b). Le développement est de la forme :

$$(5.38) \quad \psi = \frac{B}{r} + o\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

où B est une constante arbitraire.

§ 5. Interprétation physique des solutions des équations du champ de Yang et Mills associé à L(4).

Soit $\Phi(r)$ une solution de l'équation (5.24). On en déduit

$$f(r) = \frac{1}{r} [\Phi(r) - 1]$$

d'où

$$(5.39) \quad g(r) = \frac{f(r)}{r} = \frac{1}{r^2} [\Phi(r) - 1].$$

Par conséquent, le tenseur de courbure R' s'écrit :

$$(5.40) \quad R'^i_{jkl} = (\delta^i_k \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta^i_l) \left\{ -\frac{2}{r^2} [\Phi(r) - 1] - \frac{1}{r^2} [(\Phi(r))^2 - 2\Phi(r) + 1] \right\} \\ + (\delta^i_k x^j x^l - \delta_{jk} x^i x^l - \delta^i_l x^j x^k + \delta_{jl} x^i x^k) \\ \cdot \left\{ -\frac{2}{r^4} \frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{1}{r^4} [(\Phi(r))^2 - 2\Phi(r) + 1] \right\}.$$

Compte tenu des formules de passage (5.10), le tenseur de courbure pour le champ de Yang et Mills associé à $L(4)$ est :

$$(5.41) \quad R^i_{jkl} = Re'^i_{jkl} = (\delta^i_k \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta^i_l) \left\{ -\frac{2}{r^2} [Re\Phi(r) - 1] - \frac{1}{r^2} [Re(\Phi(r))^2 - 2Re\Phi(r) + 1] \right\} + (\delta^i_k x^j x^l - \delta_{jk} x^i x^l - \delta^i_l x^j x^k + \delta_{jl} x^i x^k) \cdot \left\{ -\frac{2}{r^4} Re \left(\frac{d\Phi}{dr} \right) + \frac{1}{r^4} [Re(\Phi(r))^2 - 2Re\Phi(r) + 1] \right\}$$

$$(5.42) \quad R^4_{jkl} = \frac{1}{2} Jm R'^p_{qkl} \varepsilon_{jpq} = \frac{1}{2} \varepsilon_{jpq} \{ (\delta^i_k \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta^i_l) \cdot \left[-\frac{2}{r^2} (Jm\Phi(r)) \right] - \frac{1}{r^2} [Jm(\Phi(r))^2 - 2Jm\Phi(r)] + (\delta^i_k x^j x^l - \delta_{jk} x^i x^l - \delta^i_l x^j x^k - \delta_{jl} x^i x^k) \left[-\frac{2}{r^4} Jm \frac{d\Phi(r)}{dr} + \frac{1}{r^4} (Jm\Phi(r))^2 - 2Jm\Phi(r) \right] \}.$$

Posons pour simplifier l'écriture :

$$A^i_{lkl} = (\delta^i_k \delta_{jl} - \delta_{jk} \delta^i_l) \\ B^i_{jkl} = \delta^i_k x^j x^l - \delta_{jk} x^i x^l - \delta^i_l x^j x^k + \delta_{jl} x^i x^k.$$

Tous les indices $i, j, \dots$, prennent les valeurs (1, 2, 3) car pour les solutions statiques (qui sont les seules envisagées) les composantes R^i_{j0l} et R^4_{j0l} sont nulles.

Pour donner une interprétation physique des solutions des équations du champ de Yang et Mills nous considérons l'expression :

$$T^\lambda_{\mu i} = \varepsilon_{ijk} R^\lambda_{\mu jk}.$$

Nous appelons alors

$$(5.43) \quad E = T^4_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} R^4_{jkl}$$

la composante électroïde et

$$(5.44) \quad H_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} T^k_{lj} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} R^k_{lmn}$$

la composante magnétoïde du tenseur du champ de Yang et Mills.

Soit

$$\Phi(r) = 1 + \frac{c}{r} + i \frac{c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right)$$

une solution (5.31) de l'équation (5.24).

Nous avons alors :

$$f(r) = \frac{1}{r} \left(\frac{c}{r} + i \frac{c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right)$$

et

$$g(r) = \frac{1}{r^2} \left[\frac{c}{r} + i \frac{c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] ;$$

c et c' sont des constantes réelles arbitraires.

Le tenseur R' s'écrit :

$$(5.45) \quad R'^i{}_{jkl} = A^i{}_{jkl} \cdot \left\{ -\frac{2}{r^2} \left[\frac{c}{r} + i \frac{c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] - \frac{1}{r^2} \left[\frac{c^2}{r^2} + 2i \frac{cc'}{r^2} - \frac{c'^2}{r^2} + 0 \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \right\} \\ + B^i{}_{jkl} \cdot \left\{ \frac{3}{r^4} \left[\frac{c}{r} + i \frac{c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] + \frac{1}{r^4} \left[\frac{c^2}{r^2} + 2i \frac{cc'}{r^2} - \frac{c'^2}{r^2} + 0 \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \right\}.$$

Le tenseur R du champ de Yang et Mills associé à $L(4)$ est de la forme

$$R^i{}_{jkl} = A^i{}_{jkl} \left\{ -\frac{2}{r^2} \left[\frac{c}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] - \frac{1}{r^2} \left[\frac{c^2}{r^2} - \frac{c'^2}{r^2} + 0 \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \right\} \\ + B^i{}_{jkl} \left\{ \frac{3}{r^4} \left[\frac{c}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] + \frac{1}{r^4} \left[\frac{c^2}{r^2} - \frac{c'^2}{r^2} + 0 \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \right\}, \\ R^4{}_{jkl} = \frac{1}{2} \varepsilon_{j p q} A^p{}_{qkl} \cdot \left\{ -\frac{2}{r^2} \left[\frac{c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] - \frac{1}{r^2} \left[2 \frac{cc'}{r^2} + 0 \left(\frac{1}{r^3} \right) \right] \right\} \\ + \frac{1}{2} \varepsilon_{j p q} B^p{}_{qkl} \cdot \left\{ -\frac{3}{r^4} \left[\frac{c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] + \frac{1}{r^4} \left[2 \frac{cc'}{r^2} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right] \right\}.$$

Les composantes électroïde et magnétoïde sont alors :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{j p q} A^p{}_{qkl} \left[-\frac{1}{r^2} \left(\frac{2c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{j p q} B^p{}_{qkl} \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{3c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right], \\ H_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{j m n} A^k{}_{lmn} \left[-\frac{1}{r^2} \left(\frac{2c}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{j m n} B^k{}_{lmn} \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{3c}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right].$$

En reprenant les expressions pour A et B nous obtenons finalement :

$$(5.46) \quad E_{ij} = -2\delta_{ij} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{2c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right] + (2\delta_{ij} + 2x_i x_j) \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{3c'}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right],$$

$$(5.47) \quad H_{ij} = -2\delta_{ij} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{2c}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right] + (2\delta_{ij} + 2x_i x_j) \left[\frac{1}{r^4} \left(\frac{3c}{r} + 0 \left(\frac{1}{r^2} \right) \right) \right].$$

Soit une solution (5.37)

$$\Phi = 1 + i\varepsilon \frac{B}{r}$$

où B est une constante réelle arbitraire.

Nous avons alors :

$$f(r) = \frac{1}{r} i\varepsilon \frac{B}{r}$$

$$g(r) = \frac{1}{r^3} i\varepsilon B$$

Le tenseur R' s'exprime donc par la formule :

$$R'^i{}_{jkl} = A^i{}_{jkl} \left[-\frac{2i\varepsilon B}{r^3} + \frac{\varepsilon^2 B^2}{r^4} \right] + B^i{}_{jkl} \left[\frac{3i\varepsilon B}{r^5} - \frac{\varepsilon^2 B^2}{r^6} \right].$$

Le tenseur de courbure du champ de Yang et Mills associé à L(4) s'écrit :

$$R^i{}_{jkl} = A^i{}_{jkl} \left(\frac{\varepsilon^2 B^2}{r^4} \right) + B^i{}_{jkl} - \left(\frac{\varepsilon^2 B^2}{r^6} \right)$$

$$R^4{}_{jkl} = \frac{1}{2} A^p{}_{qkl} \cdot \varepsilon_{jpq} \left(-\frac{2i\varepsilon B}{r^3} \right) + \frac{1}{2} B^p{}_{qkl} \cdot \varepsilon_{jpq} \left(\frac{3i\varepsilon B}{r^5} \right).$$

Les composantes électroïde et magnétoïde du champ sont :

$$E_{ij} = \frac{1}{4} \varepsilon_{jkl} \varepsilon_{ipq} \left\{ A^p{}_{qkl} \left(-\frac{2i\varepsilon B}{r^3} \right) + B^p{}_{qkl} \left(\frac{3i\varepsilon B}{r^5} \right) \right\}$$

$$H_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \left\{ A^k{}_{lmn} \left(\frac{\varepsilon^2 B^2}{r^4} \right) + B^k{}_{lmn} \left(-\frac{\varepsilon^2 B^2}{r^6} \right) \right\},$$

ou bien, en explicitant les expressions A et B :

$$(5.48) \quad E_{ij} = -\delta_{ij} \left(\frac{2i\varepsilon B}{r^3} \right) + (\delta_{ij} + x_i x_j) \left(\frac{3i\varepsilon B}{r^5} \right)$$

$$(5.49) \quad H_{ij} = \delta_{ij} \left(\frac{\varepsilon^2 B^2}{r^4} \right) + (\delta_{ij} + x_i x_j) \left(-\frac{\varepsilon^2 B^2}{r^6} \right).$$

Le champ obtenu ici peut être considéré comme un champ « électromagnétique généralisé ».

Tout comme pour le champ électromagnétique, le champ de Yang et Mills admet deux composantes qui sont cette fois de nature matricielle : E_{ij} et H_{ij} . Elles peuvent être considérées comme une généralisation du champ électrique et du champ magnétique.

CHAPITRE VI

CONCLUSIONS

Le présent travail n'est qu'une modeste contribution à l'ensemble des travaux consacrés aux champs du type Yang et Mills. Les recherches déjà effectuées dans ce domaine permettent d'envisager des prolongements intéressants de la théorie, notamment en ce qui concerne les interactions fortes et électromagnétiques, et le champ gravitationnel.

Perspectives.

Nous avons déjà signalé (chapitre III) l'importance du groupe conforme qui peut être considéré comme le groupe d'invariance globale en physique. Nous ne différencions pas l'invariance locale et globale, cette distinction étant uniquement historique. Dans le groupe conforme, le sous-groupe $L(4)$ donne une loi de conservation du spin relativiste, les translations apportent la conservation du moment-énergie, les dilatations et les accélérations permettent un changement d'échelle local et global.

Avant d'aborder une étude approfondie des interactions, il paraît donc indispensable de développer celle du champ « libre » de Yang et Mills associé au groupe conforme. Il s'agit alors de trouver au moins une solution approchée des équations du champ admettant une interprétation physique satisfaisante. Une telle solution pourrait être une « extension » de celle que nous obtenons pour $L(4)$.

Il nous semble également important de préciser notre théorie du champ de Yang et Mills de façon à obtenir des champs correspondant aux trois lois de conservation de l'hypercharge, du nombre baryonique et de l'isospin (2).

En exigeant que les transformations de jauge associées à ces lois de conservation aient un caractère local, nous introduisons des champs (dits de Yang et Mills) universellement couplés aux courants construits à partir de champs

ayant un isospin, une hypercharge et une charge baryonique non nuls.

Notre formalisme nous permettra d'écrire les trois Lagrangiens fondamentaux des interactions fortes. La « géométrisation » de la théorie de Yang-Mills-Sakurai ainsi que l'utilisation de l'espace-temps de la relativité générale doivent permettre d'obtenir des résultats relativement précis concernant les constantes de couplage.

Une théorie relativiste des champs de Yang et Mills est en effet nécessaire si l'on veut obtenir des résultats quantitatifs concernant les interactions fortes. Les processus dynamiques devant être pris en considération, la précision obtenue par une théorie non relativiste s'avère insuffisante.

Des problèmes concrets tels que les interactions mésons K nucléons, nucléons-nucléons pourront alors être abordés. Signalons également que les questions concernant les anti-particules devraient être examinées sous cet angle.

Nous envisageons de traiter également le problème des interactions faibles et électromagnétiques. Il semblerait logique de construire une théorie « unifiée » de toutes les interactions, aussi bien fortes que faibles et électromagnétiques. La difficulté jusqu'à présent réside dans le fait que certaines lois de conservations des interactions fortes et électromagnétiques ne sont pas respectées dans les interactions faibles. Il en est ainsi par exemple de la conservation de la parité. Cependant, il paraît possible d'obtenir une « unification » en partant d'un principe d'invariance de jauge généralisé. On aimerait espérer qu'une « bonne théorie » de ce type éclaire les mystères concernant les interactions électromagnétiques. On sait que l'indépendance de charge électrique est conservée dans de nombreuses interactions telles que, par exemple, les interactions nucléons-nucléons. D'un autre côté, les interactions électromagnétiques détruisent l'isotopie de l'espace du spin isotopique. Peut-être que l'espace d'isospin est mal défini [15]. Il se peut toutefois que des propriétés encore inconnues concernant les interactions électromagnétiques en soient la cause.

Toujours dans le cadre d'une théorie « classique » il serait intéressant d'étudier le champ gravitationnel. Il est possible que l'existence d'un couplage gravitationnel soit liée au problème de la conservation de l'énergie. Étant donné que l'on associe au champ libre de gravitation une énergie, il semble raisonnable de penser que ce champ peut être en interaction avec lui-même. Nous voyons là une analogie avec le champ de Yang et Mills (non-linéarité des équations du champ de Yang et Mills libre) ce qui permettrait de traiter la gravitation de même façon. Notre formalisme mathématique présente d'ailleurs beaucoup de points communs avec celui de la relativité générale. Il serait intéressant de calculer la constante de couplage gravi-

tationnel, ce qui donnerait une possibilité d'évaluer la masse des gravitons.

Il existe encore un autre type de problèmes qui pourrait être abordé à l'aide d'une théorie des champs de Yang et Mills. Il s'agit là de la quantification du champ de gravitation.

Déjà en 1963, Feynman [16] signale cette possibilité en remarquant la ressemblance entre la théorie des champs de Yang et Mills et la gravitation. Il quantifie le champ de Yang et Mills à l'aide de son « tree theorem » et considère ce calcul comme une première étape vers la quantification du champ de gravitation.

L'idée de la quantification du champ de Yang et Mills est poursuivie par maints auteurs dont Mandelstam [17], Bialynicki [18], De Witt [19]. Ils élaborent un formalisme simplifié à l'aide de variables elles-mêmes invariantes de jauge. Les équations du champ obtenues sont plus simples que celles de Yang et Mills. Ces auteurs les prennent comme point de départ pour une seconde quantification.

Signalons également une tentative intéressante de Fadeev et Popov [20] qui traitent le champ de Yang et Mills en utilisant l'intégration de Feynman [21].

Pour terminer, revenons au champ de Yang et Mills lui-même. Il est de grande importance de reprendre le problème de la masse des quanta de ce champ. Beaucoup d'hypothèses sont émises à ce sujet. Yang et Mills supposent que la masse est nulle mais n'avancent aucune justification sérieuse.

Sakurai envisage plutôt une masse non nulle en se fondant sur la nature même des interactions. Feynman constate qu'il est plus « agréable » d'avoir une masse non nulle, cela évite des singularités désagréables dans les calculs.

Devant ces raisonnements spéculatifs, une argumentation décisive reste à trouver.

Évidemment il serait insensé de croire que toutes les questions soulevées par la physique des particules élémentaires seront résolues de cette façon. Toutefois nous espérons que notre travail permettra, par ses prolongements, d'intéressants compléments d'information. Compte tenu du triste état dans lequel se trouve en ce moment la théorie des champs, ces petits compléments seront toujours les bienvenus.

BIBLIOGRAPHIE

[1] C. N. YANG et R. C. MILLS, *Physical Review*, t. **96**, 1954, p. 191.

[2] J. J. SAKURAI Theory of strong Interactions, *Annals of Physics*, t. **11**, 1960, p. 1.

[3] T. D. LEE et C. N. YANG, *Physical Review*, t. **98**, 1955, p. 1501.

- [4] R. UTIYAMA, Invariant Theoretical Interpretation of Interactions, *Physical Review*, t. **101**, 1956, p. 1597.
- [5] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Edizioni Gremonesi, Roma.
- [6] B. DE WITT, Cours des Houches (été 1963).
- [7] M. FLATO, *Symétries de type lorentzien et Interactions fortes*, Thèse, Gauthier-Villars, 1967.
- [8] M. FLATO, J. P. VIGIER et D. STERNHEIMER, Le groupe conforme comme possibilité de symétrie unifiée en physique des interactions fortes, *Comptes Rendus Ac. P.*, t. **260**, 1965, p. 3869.
- [9] FULTON, ROHRICH et WITTEN, Conformal Invariance in Physics, *Reviews of Modern Physics*, t. **34**, 1962, p. 442.
- [10] G. RIDEAU, Sur l'homomorphie entre le groupe $SU(2, 2)$ et le groupe conforme, *Comptes Rendus Ac. P.*, t. **261**, 1965.
- [11] M. FLATO, P. HILLION et J. SIMON, Groupe conforme, Covariance des équations des champs et Analyse dimensionnelle, *Comptes Rendus Ac. P.*, 1969.
- [12] N. N. BOGOLIUBOV et D. V. CHIRKOV, *Introduction à la théorie quantique des champs*, Dunod, 1960.
- [13] C. N. YANG et T. T. WU, *Some solutions of the classical isotopic gauge field equations* (preprint).
- [14] E. L. INCE, *Ordinary differential equations*, Dover Publications Inc.
- [15] H. YUKAWA, *Reviews of Modern Physics*, t. **29**, 1957, p. 213.
- [16] R. P. FEYNMAN, Quantum Theory of Gravitation, *Acta Physica Pol.*, t. **24**, 1963.
- [17] S. MANDELSTAM, *Physical Review*, t. **175**, 1968, p. 1585.
- [18] I. BIALYNICKI-BIRULA, *Bulletin de l'Académie des Sciences polonaise*, t. **11**, 1963, p. 135.
- [19] B. DE WITT, *Relativity, Groups and Topology*, Les Houches, 1963.
- [20] FADEEV, POPOV et FEYNMAN, Diagrams for the Yang Mills Fields, *Physical Letters*, t. **25 B**, 1967, p. 29.
- [21] R. P. FEYNMAN, Mathematical Formulation of the Quantum Theory of Electromagnetic Interaction, *Physical Review*, t. **80**, 1950, p. 440.
- [22] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, 1958.
- [23] A. LICHNEROWICZ, *Théorie relativiste de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1955.
- [24] H. KERBRAT, Introduction mathématique à l'étude du champ de Yang et Mills sur un espace-temps courbe, *Comptes Rendus Ac. P.*, t. **259**, 1964, p. 3449.
- [25] H. KERBRAT, Le champ de Yang et Mills sur un espace-temps courbe, *Comptes Rendus Ac. P.*, t. **260**, 1965, p. 6809.
- [26] M. A. NAIMARK, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, Dunod, 1962.
- [27] H. KERBRAT, Le groupe de Weyl sur un espace-temps courbe et champ de Yang et Mills généralisé, *Comptes Rendus Ac. P.*, t. **262**, 1966, p. 791.
- [28] H. KERBRAT, Groupe conforme sur un espace-temps courbe et champ de Yang et Mills associé, *Comptes Rendus Ac. P.*, t. **266**, 1968, p. 29.
- [29] H. KERBRAT, Groupe conforme et champ de Yang et Mills, *Comptes Rendus Ac. P.*, t. **267**, 1968, p. 451.

(Manuscrit reçu le 26 janvier 1970).

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Vu et approuvé :

Paris, le 25 juin 1970

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS

Robert MALLET

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1710a.

IMPRIMERIE BARNÉOUD 1. A. LAYAL, N° 6128, 12-1970.

